TURING

WILEY

Puzzles for Programmers and Pros

程序员面试逻辑题解析

[美] Dennis E. Shasha 著
费若愚　朱学武 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

数字版权声明

图灵社区的电子书没有采用专有客户端，您可以在任意设备上，用自己喜欢的浏览器和PDF阅读器进行阅读。

但您购买的电子书仅供您个人使用，未经授权，不得进行传播。

我们愿意相信读者具有这样的良知和觉悟，与我们共同保护知识产权。

如果购买者有侵权行为，我们可能对该用户实施包括但不限于关闭该帐号等维权措施，并可能追究法律责任。

TURING



Puzzles for Programmers and Pros

程序员面试逻辑题解析

[美] Dennis E. Shasha 著

费若愚　朱学武 译

人 民 邮 电 出 版 社

北　京

图书在版编目（C I P）数据

程序员面试逻辑题解析 / (美) 萨沙 (Shasha,D.E.)
著 ; 费若愚, 朱学武译. -- 北京 : 人民邮电出版社,
2013.1
书名原文: Puzzles for Programmers and Pros
ISBN 978-7-115-30195-6

Ⅰ. ①程… Ⅱ. ①萨… ②费… ③朱… Ⅲ. ①程序设
计－工程技术人员－资格考试－自学参考资料②逻辑－工
程技术人员－资格考试－自学参考资料 Ⅳ. ①TP311.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第298652号

内 容 提 要

本书共分为 3 个部分。第一部分从有趣且锻炼头脑的谜题入手，继而给出解题思路和详细答案，更有“热身问题”给大家提供充分的思考空间。第二部分综合了不同类型的谜题，如数独、调度问题及概率题等。神秘的第三部分带领大家不断历险，开动脑筋，解决大量密码及银行账户等方面的问题。几十道简洁的小谜题不仅充分锻炼了我们的思维方式，更为提高面试成功率奠定了基础。

本书不仅适合程序员阅读，更是谜题爱好者的饕餮盛宴。

程序员面试逻辑题解析

◆ 著　　[美] Dennis E. Shasha
译　　费若愚　朱学武
责任编辑　卢秀丽
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京　　　　　印刷
◆ 开本：800×1000　1/16
印张：13.5
字数：328千字　　　　2013年 1 月第 1 版
印数：1－4 000册　　　　2013年 1 月北京第 1 次印刷
著作权合同登记号　图字：01-2012-4004号
ISBN 978-7-115-30195-6

定价：35.00元

读者服务热线：(010)51095186转604　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

版权声明

Original edition, entitled *Puzzles for Programmers and Pros*, by Dennis E. Shasha, ISBN 978-0-470-12168-9, published by John Wiley & Sons, Inc.

致　　谢

献给世界各地的谜题爱好者。

首先要向本书的读者致以最诚挚的感谢。他们遍布世界的各个角落（南极洲除外），每一次交流都能让我感受到他们的智慧。有些读者成为了我的好朋友，比如Andy Liu和Mike Whittaker。Andy是一位极有天赋的教师和数学家，而Mike是一位创意无限的建筑师。有时候，一些本是由我发明的谜题会被改得连我自己都不知道从何下手，这时我就会求助于我的智囊团。如果要解决的是一道涉及数学或计算的超级难题，我会和这些才华横溢的人聚在一起一个星期来攻克它。

Scientific American 的John Rennie和*Dr. Dobb's Journal* 的Jon Erickson和Deirdre Blake对书中的很多题目都提出过编辑意见，使我受益匪浅。作为这些题目最初的读者，他们很好地检验了文字表述的清晰度，并且准确地挑出了文章中所有晦涩难懂的地方。此外，我还经常把谜题口述给一个叫Tyler的年轻人，他不但能解决它们（有时候需要一两点提示），还能确切地让我知道在他看来这是一道棘手的题（好题），还是一道无趣的题（差题）。只有那些好题才会收录在书中。

Gary Zamchick给部分谜题配上了幽默的卡通插画，为此书增色不少。他有一种非凡的能力，只要寥寥几笔就能勾勒出整个题目的精髓。在此书的第三部分，艾可博士将带着你们解密隧道迷宫，智斗冷血残忍的暴徒。为了更加生动地展现这趟旅程，Karen Shasha为之配了照片，它们和我设想的完全一样。

我的组稿编辑Carol Long、开发编辑Sara Shlaer、文字编辑Mildred Sanchez及设计师LeAndra Hosier，忍受了我对视觉效果无止境的追求，并且支持我在文字上精益求精。如果此书得以畅销，他们绝对功勋卓著。

前　　言

“我去了一家以出晦涩谜题著称的公司面试，因为上过这门课，那些谜题都不在话下。”

——鲍里斯（Boris），上过我的谜题课的纽约大学毕业生

有些人（比如我）喜欢谜题，还有些人觉得必须研究谜题才能在求职面试中取得成功。本书就是为这两种人写的。书中有一些很巧妙的题目，同时我也会教你一些解题技巧，帮助你挑战新的谜题。还有，如果你能解决最后一部分的那些超级难题，还有可能会获得奖励呢。

很多人反对在面试中采用谜题。他们反对的理由之一便是谜题的场景设置往往不合情理，例如，一个逻辑严谨的人不能发声也不愿写字。好吧，我承认，我也设计过这样的题目，但是我的大部分谜题都源自真实的问题（例如，用偶尔说谎的人来对应偶尔会发生故障的硬件）。在做研究时，我会尝试将遇到的问题抽象成一道谜题，以便认清根本问题，然后再处理表面现象。这个方法非常有效。因此，对我来说，谜题，尤其是那些恰当的好题，也算是通往科学研究和工程实践的光明之路。

那么，我为什么要编写这些谜题呢？首先，当然是因为它们非常有趣。其次，它们能有效地锻炼脑力。在鲍里斯提到的谜题课上，学生们每周都编写程序，还要比赛。这些程序每个运行两分钟，获胜者可以得到一块奇巧巧克力。我讲课的内容不多，教给他们的技巧在第二部分都能找到。在课程结束时，学生们发现他们解决实际应用问题的能力大大提高了，而这些必须要解决的现实问题往往已经被算法教授打上了“难搞”的标签。我无法明确地告诉你这个神奇的转变是由什么引起的，但是它确实发生了。

本书第一部分中的多数题目都来自我在*Scientific American*和*Dr. Dobb's Journal*上的谜题专栏，很多读者给予了我至关重要的、充满想象的反馈。这些反馈或者谜题本身引出了一些新的变体，因此即使你曾在杂志中看过这些题目，也需要更为深入地思考。

曾经有很多次，当不知道要如何解题时（即使是我自己设计的题目也会如此），我会先在纸上打打草稿，做一些尝试。最初的尝试通常是错的，但有时它会启发我找到更好的思路。第一部分的每道题后面都有一些留白，供你打草稿用。

攻克谜题是需要一定的思维模式的，一开始要天马行空式地发散思维，然后要确定方向缜密有序地找出解决方案——整个过程神似于我们在第2章介绍的“模拟退火”技术。当然我的方法不是唯一的思维模式。其他人告诉我的更好解法，我也很乐意分享给读者。

第一部分的每一章（很短）都是一道谜题，答案在第一部分的最后。第二部分就几种类型的

谜题的解答方式展开探讨，既有徒手计算的也有用计算机解答的。你会在这部分学到多种解题技巧应付那些带有约束条件的谜题，诸如数独、调度问题、数学文字游戏和概率题等。坦率地说，我觉得这些解题技巧也算是一种算法。你要善假于物，随意使用手头的工具。第三部分需要你解开一个涉及密码、银行账号和地理的谜团。数学侦探艾可博士和他的朋友们会陪你一起探险。（你以前可能已经认识了他们。）如果能解开这些谜题，就有可能获奖。

好好享受吧，祝你好运。

竞赛信息

想要参与谜题破解竞赛的读者，请把第三部分所有谜题的答案发到shasha@courant.nyu.edu。

稿件要求采用Microsoft Word或PDF格式，截止时间是2008年8月31日。本书作者丹尼斯·夏沙（Dennis E. Shasha）是唯一的裁判，他会从所有回答正确的稿件中选出10份。优胜者的奖品是一件Wrox T恤和一顶Wrox棒球帽（或其他等值商品），Wrox出版的3本书（优胜者自行挑选），还有一份“智多星”证书。为了确保收到奖品，参赛者需要在来稿中附上邮寄地址（不能是邮政信箱）。提供法定禁止投送地区的无效。一般配送时间为6到8周。Wiley出版社对于参赛稿的遗失、字迹模糊或残缺不全概不负责。Wiley出版社的员工不得参赛。

第三部分出现的所有密文可以在www.wrox.com网站上下载Microsoft Word版本。进入网站后，在搜索框内输入书名或ISBN号（978-0-470-12168-9）即可查到此书，然后在详细信息页面上单击下载链接，便能获得所有密文。

p2p.wrox.com

我们也邀请你在p2p.wrox.com网站的P2P论坛上发表书中谜题的变体，或是提供其他的解决方案。这些论坛是一个基于Web的系统，读者可以在上面发布与Wrox图书相关的消息和相关技术，与其他读者和技术用户交流心得。论坛还提供了订阅功能，只要论坛上发布了你感兴趣的新话题，我们就会发电子邮件告知你。Wrox的作者、编辑、其他业界专家和读者都会出现在这些论坛上。

在http://p2p.wrox.com上，你会发现很多不同的论坛，它们不仅有助于阅读此书，还有助于你开发自己的应用程序。加入论坛的步骤如下。

(1) 登录p2p.wrox.com网站，单击“注册”（Register）链接。

(2) 阅读用户使用条款，然后单击“同意”（Agree）。

(3) 填写必要的注册信息以及愿意提供的选填信息，并单击“提交”（Submit）。

(4) 你会收到一封电子邮件，告诉你如何确认注册账户并完成注册过程。

浏览论坛无需注册，但只有注册后才能发帖。

加入论坛之后就可以发帖和回帖了，你可以随时访问站点读取信息。如果想要以邮件的形式订阅某个特定论坛的更新，可以单击论坛名旁边的“订阅此板块”（Subscribe to this Forum）的图标。

欲详细了解Wrox P2P的使用方法，一定要查看P2P FAQ，获取关于论坛软件运行方式及P2P和Wrox图书的常见问题的解答。要查看FAQ，在任意一个P2P页面上点击FAQ链接即可。

目　　录

第二部分 解题密钥

第三部分 冒险故事

第一部分 智力游戏

如果能解出这些谜题，那么让你做管理工作显然是大材小用了。



注意 尖叫的表情表示这是一道特别难解的谜题。

第 1 章

竞赛——不可能都是赢家

1.1 甜食爱好者

杰里米（Jeremy）和玛丽（Marie）是两个喜欢蛋糕也喜欢数学的小孩，可能你也认识这样的小孩。于是，当大厨玛蒂娜（Martine）给他们准备了两块一模一样的长方形蛋糕后，杰里米便说服玛丽来玩一个游戏。

游戏的规则是这样的：杰里米先把一块蛋糕切成两份，这两份大小可能一样，也可能不一样。切完以后，玛丽决定是否要先选蛋糕。如果玛丽先选，她会选那份大的；如果让杰里米先选，玛丽可以预料到杰里米会选走那份大的。

随后，杰里米把另外一块蛋糕也切成两份（请注意，他可以把其中一份切得非常小）。如果之前是玛丽先选的，那么这次杰里米就可以拿走大的那份。如果之前是杰里米先选的，那么这次玛丽就可以拿走大的那份。

热身问题

P³ 假设每个小孩的目标是分得尽可能多的蛋糕，那么对于杰里米来说最好的策略是什么呢？

提示 在查看答案之前，用 f 和 $1-f$ 来表示第一块蛋糕被切分后两部分的大小，其中 $f \geq 1/2$。假设下面两种情况：第一种，玛丽先选，拿走了 f 那块；第二种，玛丽后选，拿走了 $1-f$ 那块。依次分析这两种情况下的结果。

热身问题解答

根据提示，玛丽会这样推理：如果她拿了大小为 f 的那块，那么杰里米就几乎可以得到第二块蛋糕的全部（杰里米会切点儿蛋糕屑给玛丽，自己拿走几乎整块蛋糕）。这样，玛丽得到的份额是 f，而杰里米得到的是 $(1-f)+1$。如果她拿了小的那块（用 $1-f$ 表示），那么对于杰里米来说最好是把第二块平分了，如此一来，玛丽得到的是 $(1-f)+1/2$。根据这个推理，杰里米意识到对他来说最好的分法是使 $f=(1-f)+1/2$，也就是 $2f=3/2$，即 $f=3/4$。这样，如果第一块蛋糕是玛丽先选，那么杰里米会得到第一块蛋糕的 1/4 和整个第二块蛋糕。如果第一块蛋糕是玛丽后选，那么杰里米会得到第一块蛋糕的 3/4 和第二块蛋糕的 1/2。在这两种情况下，玛丽都能得到 3/4 的蛋糕，而杰里米能得到 5/4。注意，如果杰里米在分第一块蛋糕时，大的那块小于 3/4，那么玛丽只要后选，就能得到多于 1/4 的蛋糕，并且能得到第二块蛋糕的 1/2，这样她能得到的蛋糕总量将多于 3/4。对比之下，如果分第一块蛋糕时，大的那块大于 3/4，那么玛丽只要先选，也能得到多于 3/4 的蛋糕。

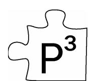
我详细地分析了热身问题，因为一个星期后，会有一个更难的挑战。这次大厨玛蒂娜做了 3 块一模一样的长方形蛋糕，杰里米和玛丽都对它们垂涎欲滴。

他们制订了新规则。杰里米还是负责切蛋糕，但是玛丽有两次先选蛋糕的机会，而杰里米只有一次。也就是杰里米先切第一块蛋糕，玛丽决定她是否要先选。然后杰里米切第二块蛋糕，这次还是由玛丽决定是否先选。第三块蛋糕还是如此。唯一需要注意的是，玛丽至少要留给杰里米一次先选蛋糕的机会。

(1) 在新规则下，杰里米怎样做得到的蛋糕才能最多？他最多能得到多少？

(2) 假设有 7 块蛋糕，玛丽有 6 次先选蛋糕的机会，谁有优势？有多大优势？

(3) 假设总是让杰里米来切蛋糕，有没有办法可以确保两个小孩能得到一样多的蛋糕？



1.2　拜占庭赌徒



在人们的印象中，拜占庭帝国是以无休止的宫廷阴谋和诡计而闻名的，但它实在不该得此恶名。现代历史研究表明，按照公元一千年的标准拜占庭帝国是相当稳定与和谐的。然而成见难消，这道谜题所讨论的游戏就是受假想的拜占庭阴谋启发的。我们称之为“拜占庭赌徒”。

赌局的规则如下。你将和一群“顾问”一起参与赌局。其中一个顾问会在一张纸上写下 0 或者 1，展示给其他顾问看，但不会让你看到，然后把那张纸扣着放在你面前。随后，每个顾问都会告诉你纸上写的是什么数字。他们都演技精湛，所以你无法通过任何明显的记号或面部表情分辨出他们是否在说谎。每一局，你都可以选择不下注，也可以押上你部分甚至全部资产。

热身问题

假设一共有 4 位顾问，其中两个人会一直说实话，但是你不知道是哪两位。你可以玩三局，每一局都采用等额投注①。赌局开始时，你有 100 美元，你能确保赢多少钱呢？

热身问题解答

如果 4 位顾问中，有 3 个或 4 个人给你的建议相同，那就在他们说的那个数字上押最大的注。因为这群人中，至少有一个人是诚实的。如果每两个人给的建议是相同的，那这局先不要下注。这一局结束后，你就能知道哪两个顾问是说实话的，这样以后每局你都可以押最大的注。也就是说，从第二局开始，你就可以押上所有的钱而且能稳赢。三局结束后，你将会有 400 美元。

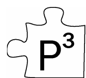
---

(1) 假设现在只有 3 位顾问，而且只有一个人会一直说实话。你还是可以玩 3 局，每一局都采用等额投注。赌局开始时，你有 100 美元，你能确保赢多少钱呢？

这个赌局将变得更长也更难以应付。你可以玩 4 局，但是不再有人一直说实话了，只会有一位"不总说实话"的顾问，他不一定每局都说实话，但是 4 局里至少有 3 局要说实话。更糟的是，顾问们在你下完注后甚至可以改写纸上的数字。但是如果改写数字会导致那个"不总说实话"的顾问无法存在，他们便不能更改。

(2) 4 轮赌局，4 位顾问，其中 3 位可以随意说谎，另一位 4 次中必须至少有 3 次说实话，在这种情况下，你能保证赢多少？

(3) 如果你可以参加 5 局，"不总说实话"的顾问 5 次中必须有 4 次说实话，另外 3 位顾问可以随意说谎，在这种情况下，你能保证最后至少还有 150 美元吗？



① 你若押对了数字，便额外获得等同于你所押的赌注的钱；你若押错，便损失了赌注。——译者注

1.3 “碰碰”运气

在电影《赌命法则》①的世界里，运气或多或少被设定为一个人永久性的特质。幸运的人不论在赌桌上还是在十字路口都好运连连。但是有那么一群人，他们懂得如何通过触碰来窃取别人的运气，所以好运的人得提防和这群人发生身体接触。影片中主角的任务之一就是要找到这些好运的人。有一次，他想要试一下他招募的那些人的运气，于是，他让他们蒙着眼在树林里奔跑。运气最好的就是第一个到达目的地的人，而很多不那么走运的都撞到了树上。

我们来玩一个温和点的游戏，一般形式是一共有 N 个人参加，有 B 次机会下注。每个玩家都知道 N 和 B 的值，且每个人都有一笔起始资金（不一定相等），以点数计。

每一轮都是等额投注，抛硬币，赌哪一面朝上。如果你押 x 点并且赢了，你的财富就会增加 x 点，否则，输了就会损失这 x 点。

在每一次抛硬币之前，每个人自行选择将赌注（可以不下注，也可以押部分甚至全部点数）押在正面或反面。

当 B 轮赌局结束后，剩余点数最多的那个玩家将获胜。如果有两个人的剩余点数一样，就没有赢家。这些点数在游戏结束后是没有任何价值的，所以只有成为最后的胜利者才可以获得奖赏。

热身问题 1

P³ 现在鲍勃（Bob）和爱丽丝（Alice）拥有相同的点数，而且鲍勃要先于爱丽丝下注。假设还有一轮，爱丽丝有多少获胜的机会？

热身问题 1 解答

如果鲍勃押 x 点赌正面，那么爱丽丝就押 x+1 点也赌正面。如果确实是正面，那么爱丽丝获胜，否则，鲍勃将获胜。同样，爱丽丝也可以选择什么都不押，这样，如果是反面，爱丽丝便获胜。无论哪种情况，爱丽丝获胜的概率都是 1/2。

热身问题 2

P³ 还是爱丽丝和鲍勃两个玩家，这次爱丽丝比鲍勃拥有更多的点数，还可以玩 5 轮。如果鲍勃要比爱丽丝先下注，爱丽丝怎样才能使她获胜的概率最大？

热身问题 2 解答

爱丽丝每次都可以稳赢。每一轮，爱丽丝都追随鲍勃下同样的注。假设鲍勃押 b 点赌硬币是

① 电影名为 *Intacto*，中文译为《赌命法则》，也叫《完整无缺》，是西班牙一部带有寓言意味的惊悚电影。
——译者注

正面，那么爱丽丝也押 b 点赌正面。无论硬币最后是正面朝上还是反面朝上，爱丽丝的剩余点数总是比鲍勃多。

现在让我们来思考几个更有挑战性的问题。

(1) 鲍勃、卡罗尔（Carol）和爱丽丝 3 个人玩。爱丽丝有 51 点，鲍勃和卡罗尔都只有 50 点。按照鲍勃、卡罗尔、爱丽丝这个顺序依次下注。鲍勃和卡罗尔结成联盟，他们俩无论谁赢了都会和另一个分享奖赏。如果只剩下一轮，鲍勃和卡罗尔要如何下注才能使他们当中至少一个人获胜的概率最大?

(2) 如果爱丽丝必须第一个下注，还能得出上题的结论吗?

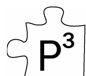
(3) 鲍勃和爱丽丝两个人玩，鲍勃有 51 点，爱丽丝有 50 点，还有两轮。倒数第二轮鲍勃先下注，最后一轮爱丽丝先下注。两轮之后，鲍勃获胜的概率大于 1/2 吗？如果大于 1/2，具体大多少?

(4) 鲍勃有 51 点，爱丽丝有 50 点，还有两轮。但这一次，倒数第二轮爱丽丝先下注，最后一轮鲍勃先下注。两轮之后，鲍勃获胜的概率大于 1/2 吗？如果大于 1/2，具体大多少?

(5) 鲍勃有 51 点，爱丽丝有 50 点，还有两轮。倒数第二轮爱丽丝先下注，最后一轮鲍勃先下注。这一次，鲍勃事先声明倒数第二轮他的赌注将是 20 点，但是他会等到爱丽丝下完注后再决定押在哪一面。爱丽丝获胜的概率能大于 1/2 吗?

就好像挤进芭蕾舞团、争夺奥运会金牌或攀缘权力的金字塔，往往名额越少，竞争越激烈，承担的风险也就越大。看看你是否认同这一点。

(6) 鲍勃、爱丽丝、里诺（Rino）和朱莉安娜（Juliana）4 个人玩，他们每人都有 100 点，还有两轮。每个人都竭尽全力想赢，因此不再有任何形式的联盟。倒数第二轮，鲍勃和爱丽丝押 100 点赌正面，里诺押 100 点赌反面。现在轮到朱莉安娜下注，她知道下一轮她将是第一个下注的人。那么，如果她这一轮押 90 点（不管是押正面还是反面），她赢的概率是多少？她应该押正面还是反面呢?



1.4　信息增益



乔丹（Jordan）和他的 5 个朋友阿里安娜（Ariana）、鲍勃、卡罗琳（Caroline）、大卫（David）及埃伦（Ellen）是智多星俱乐部的领军人物，他们都是杰出的解谜者。因此，永远穿着考究的著名游戏竞赛节目主持人杰夫·尼古拉斯（Jeff Nicholas），向乔丹和他的朋友们发出了比赛邀请。

“我们的比赛是现场直播的。我会蒙上你那 5 个朋友的眼睛，给他们各戴上一顶帽子，帽子上写有 1 到 10 中的某一个数字（可能有些人的数字是一样的），然后将他们领到电视直播间。在直播间里，我会组织他们按我指定的顺序围成一个圈，然后取下蒙眼布，给他们换上不反光的深色太阳眼镜，以防止他们互相使眼色。

“他们到达直播间后，你和观众便可以通过电视监控器看到他们，也可以看到他们头上的数字，但是他们看不到你。我手上有一张蓝票和一张红票。你可以让我把其中的一张票交给他们 5 人中的任意一个。你只能做这些。敲打直播间的窗户之类是不允许的，否则你们将被取消比赛资格。

“你的朋友们也不可以互相交谈或者传递任何信号，否则都会被取消比赛资格。（显而易见，除了递交那张票，我不会帮你们任何忙。）但是，他们能看到那张票被交给了谁及票的颜色，也能看到其他人帽子上的数字，不过无法看到自己帽子上的数字。

“我下令后，每个人都伸出手指代表自己头上的数字。猜对的人将获得千倍于自己头上数字的美元作奖金。如果所有的人都猜对了，那么乔丹，你将获得 5000 美元的奖金。但是如果有人猜错了，你得给我买套新的阿玛尼西装。”

“就这样？”乔丹问道，“他们从外界收到的唯一信息就是谁拿到了票以及票的颜色？”

“是的，”尼古拉斯说，“但是要记住，他们每个人都能看到别人帽子上的数字。我估计你赢不了这个比赛。我真的很想要一套西装。”

(1) 乔丹有没有可能设计出一套协议，使得他的 5 个朋友都能猜对他们帽子上的数字？如果可以，请解释一下。如果不行，乔丹获胜的概率高吗？

热身问题

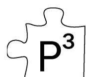
我们先来考虑一个相对简单的情况，这样对乔丹要设计的协议可以有个大致的了解。假设 5 顶帽子上的数字必须是连续的（例如 4，5，6，7，8），乔丹应该怎么做？

热身问题解答

乔丹和他的朋友可以遵循以下协议。阿里安娜代表 1，鲍勃代表 2，卡罗琳代表 3，大卫代表 4，埃伦代表 5 和 6。如果乔丹把票交给阿里安娜，说明这串连续的数字是从 1 开始的。如果交给鲍勃，说明是从 2 开始的，交给卡罗琳就是从 3 开始，交给大卫就是从 4 开始。如果交给埃伦蓝票，就说明从 5 开始，而如果交给埃伦的是红票，则代表从 6 开始。

因此，只要乔丹一发出票，他的 5 个朋友就都知道了起始数字。他们只要看看其他人帽子上的数字，就能用排除法推算出自己的数字了。

但是在杰夫的挑战中，这些数字并不一定是连续的，甚至有可能存在相同的数字。你认为乔丹能挑战成功吗？



1.5　直冲云霄!

“直冲云霄”这个智力游戏是基于空心乐透球的。以下是游戏规则。

你的对手有 100 张完全一样的纸。他被安排在一个你看不到的房间，在每张纸上不重复地写下 1 到 1 000 000 之间任何一个数字，然后将这些纸分别塞到不透明的小信封里。接着，这些信封将被交到一个独立的第三方“填充者”手里。填充者一直是当着你和对手的面工作的。他给你看 100 个空心的乐透球，然后把信封的顺序打乱，将它们分别塞进 100 个乐透球中并将球封口。这些球都是经过跌落、弹跳和弹性测试的，可以保证它们的物理性质完全相同。

填充者接下来把这些球都放到乐透机中。乐透机将彻底地搅乱这些球，直到摇出来一个球，把它编为 1 号球。这个球打开后，你将获知纸上的数字（我们将其简称为“值”）。你可以选择“捕获”或者放弃这个值。如果选择捕获，那么这个值将进入你的“捕获堆”，并记为已使用一次“捕获”；如果放弃，那么这个值就永久地进入了“弃值堆”，但是，你可以记住这个值以备后用。重复上述操作，直到 100 个球都从机器里出来。你总共有 3 次“捕获”机会。你的目标是捕获对手所写的最大值。如果成功了，你将赢得 100 000 美元；如果失败了，你将输掉 100 000 美元。你应该参与这个游戏吗？若参与的话，获胜的概率有多大？

这道题其实是“苏丹的女儿”谜题的变体。年轻的求婚者要从苏丹的 100 个女儿中选择他的新娘。这 100 个姑娘以随机的顺序介绍给他，他只能根据她们的外貌和仪态来作出决定，没有其他可供评判的依据。如果他拒绝了其中的一个，那么他和她就彻底无缘了。一旦他作出了选择，就只能娶那一个。

热身问题

P^3 假设这 100 个姑娘介绍给他的顺序与她们的外貌无关，比如是基于她们的出生时间，你能为这个求婚者设计一个策略，使得他至少有 1/4 的概率娶到最美的那个姑娘吗？

热身问题解答

策略如下。求婚者首先逐个结识前 50 个女儿，但是拒绝她们。随后，在剩下的 50 个中，他选择其中第一个比之前见过的 50 个都美丽的女儿。当然，这不能保证他能娶到最美的那个（甚至不能保证他能选到一个姑娘），但是，这个策略的优点是，只需简单的分析便能大致得出娶到最美的女儿的概率。分析如下。最美的女儿在后 50 人中的概率是 1/2，第二美的女儿在前 50 人中的概率是 1/2，这两个条件同时满足的概率是 1/4——假设这 100 个姑娘被介绍给求婚者的顺序与外貌无关（比如就像题目中假设的，是基于她们的出生时间）。当这两个条件同时满足时，求婚者可以按照上述策略选到最美的姑娘。而实际上，此策略也适用于其他情况。例如，第三美的女儿在前 50 人中，最美的和第二美的都在后 50 人中，但最美的比第二美的先出现。如果更深入地分析，会发现更好的策略是拒绝前 37 个女儿，然后选择之后出现的第一个比这 37 位都美貌

的女儿。

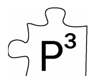
---

(1) 这个奖金为 100 万美元的“直冲云霄”游戏有三次“捕获”机会，有没有好的策略呢？如果有的话，你的获胜概率是多少呢？

提示 编程可能会派上用场。

---

(2) 如果有 1000 个乐透球，答案会如何变化？



1.6　政治分肥

一笔多达 1 亿美元的款项将被拨给一个州，这个州由 5 个区组成。州议会中的议员席位是按照各区人口占州人口的比例分配的。A 区有 35 位州议员，B 区有 25 位，C 区有 16 位，D 区有 14 位，E 区有 10 位。

如果由 51 位以上议员组成了联盟，那么他们就能使这笔款项拨给自己所代表的区，拨款将按照议员人数的比例分配给各个区。例如，如果 A 区的 35 位议员和 B 区的 25 位议员结成联盟，他们就能使得这 1 亿美元拨给 A 区和 B 区，A 区将得到 35/60 亿美元，B 区将得到 25/60 亿美元。每个区都只关心他们自己的利益。

热身问题

P3 对 B 区来说，怎样结盟是最好的？

热身问题解答

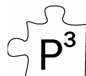
对 B 区来说，B、C 和 E 这 3 个区结盟是最好的，因为这样 B 区能得到总款项的 25/55；而如果跟 A 区结盟，B 区只能得到总款项的 25/60。

---

(1) 可能会形成哪些联盟？

B 区的议员历来都有一项特权，当分配拨款的时候他们可以操控规则。也就是说，他们不仅可以要求形成联盟的议员必须达到半数以上（就像我们之前假设的 51 位），还可以规定更高的比例。例如，他们可以要求联盟的议员达到总人数的 67%或者 75%，才可以获得拨款。

(2) 为了得到尽可能多的钱，B 区应该怎么规定这个百分比（51%、67%还是 75%）？



1.7 社会博弈

亚当·斯密（Adam Smith）提出，在自由市场中，有一只“看不见的手”会引导自利的生产商将商品以低价出售给消费者。自此之后，政府和政治就不再被混为一谈了。但是，直到两个多世纪以后，摩根斯特恩（Morgenstern）和冯·诺依曼（Von Neumann）创立的博弈论以及约翰·纳什（John Nash）的研究成果才就这种自利行为的前因后果给出了合理的数学分析。（电影《美丽心灵》的数学家就是以纳什为原型的。）

这道谜题就是博弈论在社会商品中的应用，让我们从“看不见的手”开始。

鲍勃和爱丽丝是两个有竞争关系的生产商。如果他们给商品定个高价，便可以共享市场，每个人都能获得 3 份利润。如果爱丽丝决定降价，而鲍勃仍维持原价，那么爱丽丝就可以获得 4 份利润，而鲍勃则分文无收，因为不会有人向他购买商品。这时，鲍勃会降价以获得至少 1 份利润。类似地，如果转换角色，则获得 4 份利润的就是鲍勃，而爱丽丝不再获利。因此，出于利己的目的，他们俩都会降价，获利都将降至 1 份。

下表描述了上述的 4 种情况，其中，鲍勃和爱丽丝的利润用二元组的方式表示，左边的数字代表鲍勃的利润，右边代表爱丽丝的利润。例如，右上角的单元格代表鲍勃高价（0 份利润），爱丽丝低价（4 份利润）的情况。

	爱丽丝 高	爱丽丝 低
鲍勃 高	3，3	0，4
鲍勃 低	4，0	1，1

约翰·纳什定义了均衡状态（equilibrium state）的概念，后来被称为纳什均衡。在此状态下，任何一方背离均衡状态，都不可能获得好处。这个例子中唯一的纳什均衡状态位于右下角单元格，即鲍勃和爱丽丝都不单方面提价。如果鲍勃提高价格（对应右上角单元格），他的利润将降为 0；同样，如果爱丽丝提高价格（对应左下角单元格），她也将没有利润。

这就是那只“看不见的手”在起作用。对于消费者来说，鲍勃和爱丽丝的竞争会导致商品售价降低，对社会是有利的。事实上，现代经济已经充分证明了这一点。

不过利己思维不一定能给社会带来好处。假设我们用这张表描述的不是相互竞争的生产商对商品价格的选择，而是他们在诚信经商或社会责任上的表现。于是，“鲍勃 高”这一行代表鲍勃诚信经营，而“鲍勃 低”这一行代表他信誉不良（比如欺诈、污染或者贿赂议立法者）。右上角的单元格描述了鲍勃诚信经营但是爱丽丝不守信用的情形，你可以看到，爱丽丝反而能受益。如果他们俩都进行不正当交易，他们的利润都将下降。在这个情形中，利己思维给社会造成了损失。那些腐败的国家、犯罪高发的地区以及争吵不休的家庭，都是活生生的例子。

博弈论是中性的。同样的博弈矩阵，同样的纳什均衡，结果却可好可坏。利己思维对社会可以是福，也可以是祸。

现在，让我们假定你的工作是设计公共政策。面对这个表示欺诈经营带来的个人利益的矩阵，你想要在一定程度上改变它。于是，你建立了警察和刑事司法体系。如果违法经营，有 10%的概率被抓到，且将损失 5 份的利润（比如，关进监狱无法营业）。

于是，在右上角单元格的情况下，爱丽丝的利润有 90%的几率是 4 份，有 10%的几率是−5 份，因此预期收益是$(4\times0.9)+((-5)\times0.1)=3.1$。根据我们的预期，重新计算矩阵如下：

	爱丽丝 诚信	爱丽丝 欺诈
鲍勃 诚信	3， 3	0， 3.1
鲍勃 欺诈	3.1， 0	0.4， 0.4

现在，如果双方都诚信经营，那么欺诈行为所带来的利益会明显减少。如果进一步加重惩罚或者提高被抓住的概率，双方都诚信经营将有可能实现纳什均衡。

热身问题

P3 假设你可以加大惩罚的力度（例如使利润损失更大），但不能提高被抓住的概率，你可以也使左上角和右下角单元格都实现纳什均衡吗？

热身问题解答

如果将惩罚带来的利润损失设定为 8 份，那么爱丽丝在右上角单元格状态下的获利是$(4\times0.9)+((-8)\times0.1)=2.8$，在右下角单元格状态下的获利是$(1\times0.9)+((-8)\times0.1)=0.1$。重新计算矩阵为：

	爱丽丝 诚信	爱丽丝 欺诈
鲍勃 诚信	3， 3	0， 2.8
鲍勃 欺诈	2.8， 0	0.1， 0.1

因此，双方都诚信经营将实现纳什均衡，因为鲍勃和爱丽丝都没有理由欺诈经营来离开这个状态。另一方面，右下角的单元格描述的也是纳什均衡。如果鲍勃和爱丽丝都进行欺诈经营，他们还是可以获得微薄的预期收益，但如果任意一人想要诚信经商，那就会连这点儿微薄的利润都保不住。

下面给出几个更具挑战性的谜题。

(1) 如果想使双方都欺诈经营不再是纳什均衡，应该怎么更改惩罚机制？

随着社会文明的进步，人们惩罚的观念发生了改变，提出了“罪罚相适应”原则。该原则限制了量刑过重。

(2) 假设你负责制定公共政策，想将对欺诈经营的惩罚限制在 5 份利润之内，那么如果只想维持左上角单元格为纳什均衡，你应该将抓住犯罪行为的几率提高到多少？

在现代社会中，不平等现象还是存在的。即使大家都诚信守法，不同生产商的受益也存在着差别。比如，鲍勃和爱丽丝都诚信经营，鲍勃的利润是 5 份，而爱丽丝只有 2 份。且暂时让我们假设欺诈经营是不会被抓到的，则博弈矩阵如下：

	爱丽丝 诚信	爱丽丝 欺诈
鲍勃 诚信	5，2	0，4
鲍勃 欺诈	4，0	1，1

大家都诚信经营时，社会收益有所增加，但未能实现平等。另一方面，欺诈经营的诱因也随之发生变化。

(3) 假设欺诈经营被抓到的几率是 10%，能不能找到合适的惩罚值使得右上角单元格（爱丽丝违法经营，鲍勃诚信经营）成为唯一的纳什均衡点？

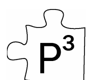
(4) 仍然假设欺诈经营被抓到的几率是 10%，要想使爱丽丝一直诚信守法，要怎么设计惩罚机制？

最后，让我们回到最开始时的设定。主角还是有竞争关系的生产商鲍勃和爱丽丝，不存在任何的惩罚机制，博弈矩阵如下。

	爱丽丝 高	爱丽丝 低
鲍勃 高	3，3	0，4
鲍勃 低	4，0	1，1

那只“看不见的手”引导他们降价，但他们并不愿意这么做。他们意识到，如果建立合作关系，那么其总收益将是 3+3=6，而不是竞争关系下的 1+1=2。因此他们考虑合并企业，以获得 6 份（而不是 2 份）的利润。这样，对于鲍勃来说，由于合并带来了额外的收益，他会认为爱丽丝的企业实际上具有 5 份利润的价值，而不是现在竞争关系下所挣得的那 1 份利润。当然，这些增加的收益都是消费者贡献的，因为其商品价格大致相同。

下次当你听到有人探讨不平等、犯罪、开明的自利[1]和反垄断法时，你就可以拿出博弈矩阵来，其中所蕴含的智慧远远胜过夸夸其谈。



① 英文为enlightened self-interest，意为人们各种看起来是“利他”的行为，根本上都是一种出于“自利”动机，追求自身利益的行为。亚当 · 斯密在《国富论》中有如下描述：“不是屠夫、酿酒师和面包师的善心才让我们有了心仪的晚餐，他们考虑的都是他们自身的利益。”——译者注

1.8　猫鼠游戏

一个小偷刚刚抢劫了市中心的一家银行。他自以为自己干得悄无声息，一定没有被警方追踪。但实际上，警方早就接到了警报，并且掌握了小偷的确切位置。他们希望放长线钓大鱼，将小偷及其同伙一网打尽。

这个城市的布局可以用一个 19×19 的道路网格表示。小偷（用 T 表示）的起始位置正好在城市中心，距离城市任一边界都是 9 格。图 1 只展示了整个城市网格的右上角部分。小偷一开始向北驶向城北的第一个十字路口。在每一个十字路口，车辆都可以向右转，向左转，或者直行，但不能后退。如果能到达城市的南边界或北边界，小偷就能逃之夭夭了。

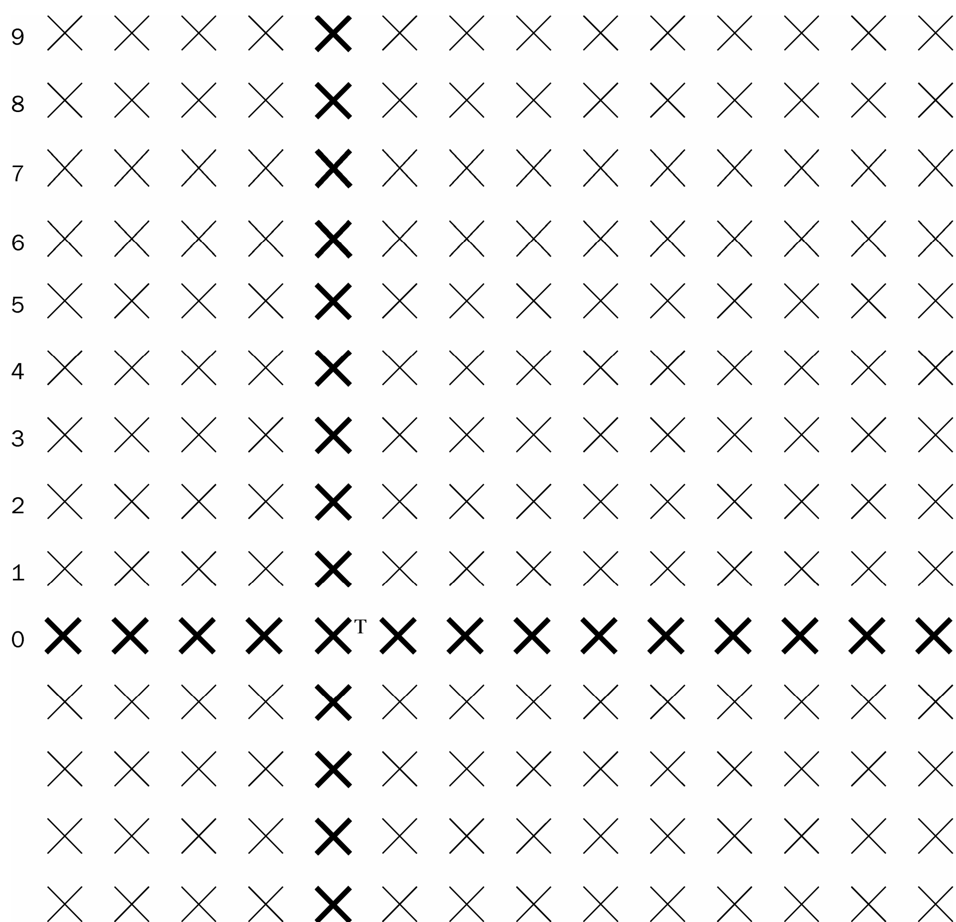


图 1　标记 T 处即是小偷的初始位置。他和北边界、东边界、南边界和西边界的距离都是 9 个格子，此图只展示了北边界和东边界

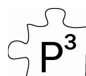
警察想先看看小偷要开车去哪里，但他们要确保小偷不能开出城市网格。

在每个十字路口，只要没有警察，小偷便可以自由行驶。但如果有警察，他们便可以逼迫小偷向左、向右或者直走。然而，警方想尽可能留给小偷一定的自由。这样警察就必须决定如何部署警力以实现下述目标。

(1) 警方只想在 5 个十字路口控制小偷的行驶方向，他们也知道小偷是迫不及待地想要逃脱。那么小偷最多过多久（以网格计）便可以到达北边界或南边界？

(2) 假设警方不想让小偷到达北边界或南边界，因此他们的计划是，每 n 个十字路口中选 m 个（$m<n$）控制小偷的前进方向。如果他们既要防止小偷逃脱，又想对小偷的行驶路线施加最少的干预（m/n 最小），m 和 n 的值应该是多少？

(3) 如果小偷只要到达任何一个边界（包括东边界和西边界），就可以逃脱，那么 m 和 n 的值又应该是多少？



1.9　流感中的数学



假设政府卫生部门告诉你，如果接种流感疫苗，你有 5%的概率会死于疫苗的不良反应，如果不接种疫苗，在疫情爆发时你有 10%的概率被传染并死于流感。假设疫苗能够提供完美的保护，你愿意接种疫苗吗？

很多人都会选择不接种。

这一明显的不理性行为通常被归因于“不作为偏见”，即作为与不作为相比，人们往往更倾向于不作为。但是我认为还有其他原因。一方面，卫生部门为了证明自己存在的意义，更希望人们采取行动。如果是这样，他们可能会夸大流感的后果，或者轻描淡写接种疫苗的风险。

但是，即便卫生部门给出的概率是可信的，并且“不作为偏见”也被纠正，人们还是注意到如果大多数人接种了疫苗，那自己即使不接种，染上流感的风险也会降低。

假设，你不接种疫苗死于流感的概率可以用以下公式计算：如果 f 表示接种疫苗的人口比例（不包括你），那么你死于流感的概率就是$(1-f)\times 10\%$。比如说，65%的人接种了疫苗，还有 35%的人（包括你）没有接种，那么你染上流感的概率是 $0.35\times 10\%=3.5\%$。

热身问题

P3 假设疫情爆发时，卫生部门可以要求 60%的人必须接种疫苗，那么对于全部人口来说，死于流感的平均风险有多大？

热身问题解答

根据题中描述，如果卫生部门禁止所有人接种疫苗，那么死于流感的人口比例是 10%。而如

果其强制要求每个人都接种，死于疫苗不良反应的人口比例就是 5%。如果 60%的人接种了疫苗，那么他们有 5%的概率死于疫苗的不良反应，但是没有接种疫苗的人有 $40\% \times 10\%$的可能死于流感，所以他们的死亡比例为 4%。因此，所有死亡人口的比例是$(0.6 \times 5\%)+(0.4 \times 4\%)=4.6\%$。

---

(1) 如果卫生部门强制要求一定比例的人口接种疫苗，那么为了使流感爆发时的平均死亡率最低，应该如何规定这个比例？

另一方面，假设政府部门觉得强制人们接种疫苗的做法有失妥当，因此，卫生局轮流给每个人都提供一次接种疫苗的机会，如果拒绝了就没有第二次机会了。每个人都知道在他之前有多少人接种了疫苗，并且认为其他人也和自己一样认可卫生部门提供的风险统计数字（接种疫苗有 5%的概率死于不良反应，不接种疫苗有$(1-f) \times 10\%$的概率死于流感）。当且仅当疫苗对自身有益时，大家才会接种疫苗，而不会出于更为崇高的目的。

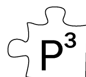
(2) 在上述前提条件下（没有强迫接种，信任卫生部门的风险统计数据，利己思维），百分之多少的人口会接种疫苗？

(3) 假设有 25%的人是无论如何都不会接种疫苗的，但是接种之前谁也不知道具体是哪些人。那么在和上题同样的前提条件下，百分之多少的人口会接种疫苗？

卫生部门看了推测结果后，意识到善意的谎言还是必要的。因此，卫生部门决定将感染流感后的死亡率从 10%夸大为 R，那么根据之前的公式（其中的 10%已经用 R 来替换），不接种疫苗的感染流感死亡概率将变成$(1-f) \times R$。这个夸大感染病毒后死亡概率的策略是一个精心守护的秘密，因此所有人都还是完全信任政府并且认为其他人亦是如此。

(4) 同样，卫生部门不会强迫任何人接种疫苗，那么为了使自愿接种疫苗的人口百分比同第 1 题，卫生部门应该将流感的致死率夸大为多少？

免责声明　感染流感和接种流感疫苗的实际致死率要远远低于此题中给出的数字。此外，“善意的谎言”方案是纯属虚构的。



第 2 章

设计——想象力决定一切

2.1　冰上历险 

还记得印第安纳·琼斯（Indiana Jones）和他的皮鞭吗？在这道题中，印第安纳必须克服一系列的障碍才能到达自己的目标。他站在一块板上，这块板类似于滑板，但是不能倾斜，底盘下有 4 个金属滚球轴承作轮子。他在冰封的光滑的湖面上滑行，湖面上不时会出现竖立着的细长木棍。

具体规则如下。

1. 如果印第安纳在沿着既定方向滑行时，没有用皮鞭缠住木棍，他将沿原方向继续直线行进。这样的话，他就不能使滑板转向。

2. 皮鞭很轻，向任意方向甩出皮鞭都不会改变他滑行的方向。

3. 他可以随意收回缠住木棍的皮鞭。

4. 他可以拉紧皮鞭或借力进行旋转，但推皮鞭是不起作用的。

热身问题

P³ 图 2 展示了印第安纳将要接受的一个挑战。他要从图中所示的冰封的长廊的一头滑行到另一头，其中一端有两个障碍物，挡住了一部分通道。假设他可以以任意角度进入长廊，那么怎样才能在不碰到障碍物的前提下到达长廊的另一头？

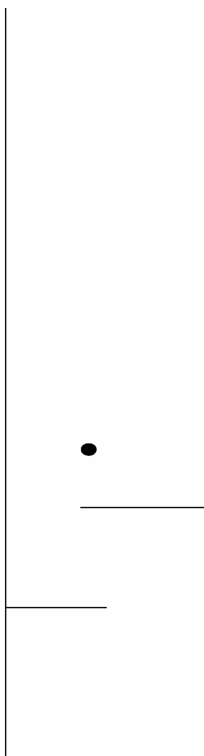


图 2　印第安纳要怎样利用他的皮鞭，才能顺利地从长廊的底端滑行到顶端，而不碰到任何障碍物及长廊的两侧？假设他可以以任意角度进入长廊。图中的圆点代表木棍

热身问题解答

解法如图 3 所示。印第安纳以特定的角度进入长廊，然后如虚线所示甩出皮鞭，并绕着木棍旋转。

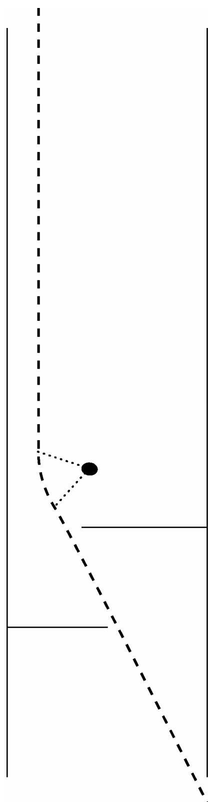


图 3　印第安纳绕着木棍（黑点）旋转，直至滑行方向和长廊的墙面平行

接下来还有两个问题。

(1) 图 4 中用黑点标记了两根木棍，要绕过障碍物从底端穿过长廊，印第安纳还需要更多的木棍吗？

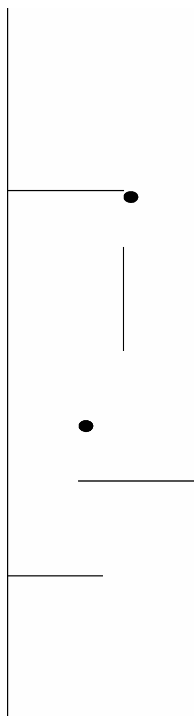


图 4　印第安纳要从长廊的底端到达顶端，并且不碰到任何障碍物或墙。他可以以任意角度进入长廊。如果只有图上以黑点表示的两根木棍，印第安纳能完成任务吗

(2) 冰面上有一些物品（如图 5 所示，以 X 标记）和 L 形的障碍物，印第安纳参加了一个“滑冰夺宝”游戏。为了拿到这些物品，印第安纳最少需要多少木棍，分别放置在哪里？

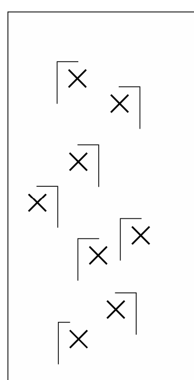
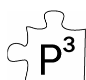


图 5　为了拿到所有的 X，印第安纳最少需要放置多少根木棍？



2.2　最佳术语

目之所及，各种迷你风尚无处不在，各种相关产业也一一崛起。这些时尚风潮往往能催生一堆有特色的术语。例如，发送短消息给某人可以说“短你”，用谷歌搜索引擎查找信息可以说“谷歌一下”。这类缩写并不是我们这个时代特有的。拍摄电影时会用简短的一个词“开麦拉”[①]来表达“我们将要开始拍摄，请演员们做好准备，其他人员保持肃静”之意。有时候，某些语言中独有的精炼短语还会被其他语言借用。一向以自己的语言为傲的法国人，也从英语中借鉴了“milestone”和“IP”，当然，“spoon”这一类的词，他们是绝不可能借用英语的。

作为出谜人，我们可以为创造更精炼的术语助一臂之力。做法是，将组成短语的词语抽象成字母，然后对字母进行编码。市场营销人员稍后可以找到相匹配的词语。我们将避免使用一些概率估值，一律采用具体的数字。

假设每条信息都是由 A、B、C 或 D 组成，一共包含 60 个字符。如果必须将它们编码成比特，在没有任何额外信息的情况下，你可能会进行如下编码：

```
A-00
B-01
C-10
D-11
```

因为每条消息都包含 60 个字符，每个字符被编码成 2 个比特，那么整条消息将需要 120 比特（15 个字节）。例如，相比每个字符都采用占一个字节的 ASCII 编码，这已算是一种非常简洁的编码形式了。如果我们掌握更多的信息，还可以创造出更简洁的编码方法。

热身问题

P³ 假设每条消息都包含 60 个字符，其中有 30 个 A，15 个 B，10 个 C 和 5 个 D，在这种情况下，如何构造高效简洁的二进制编码方法？

热身问题解答

直觉告诉我们，想要构造高效的二进制编码方法，要用最少的比特数对 A 进行编码，B、C、D 对应的比特数依次递增。塞缪尔・摩尔斯（Samuel Morse）正是在这个直觉的指引下发明了以他名字命名的摩尔斯码。信息论能帮助我们更深入地理解这一点。

信息论最早是由克劳德・香农（Claude Shannon）提出的。香农受到统计热力学的启发，将“熵”定义为包含所有字符的概率的计算公式（例如，字符 A 出现的概率是 30/60 即 1/2，而字符 D 的出现概率是 5/60 即 1/12）和概率的对数。熵代表了单个字符的最优二进制编码长度的加权平

① 开麦拉是英语 camera 的汉语音译，是照相机、摄像机的意思。——译者注

均值。在此例中，熵的公式为：(1/2 log2)+(1/4 log4)+(1/6 log6)+(1/12 log12)，其中所有对数是以 2 为底的。计算得出每个字符需要 1.73 比特。当然，作为编码方法的设计师，可以自由选择具体的编码形式，我们的方案是用整数位比特对字符进行编码：

```
A-1
B-01
C-000
D-001
```

按照我们的编码方案，在每条消息中，字符 A 出现 30 次，需要 30 比特，字符 B 出现 15 次，需要 30 比特，以此类推。消息的总长度是 $30+(15\times2)+(10\times3)+(5\times3)= 105$ 比特，结果是平均每个字符占用 105/60 即 1.75 比特。依靠直觉作出的设计还是相当不错的。

迄今为止，我们考虑的都是单个字符出现的频率，但事实上我们往往掌握更多的信息。例如，在英语中，“q”和“u”出现的频率都很低，而且“u”在大部分情况下都是跟在“q”后面一起出现的。因此，我们或许可以将“qu”视作一个字符来编码。知道这一点是否有助于我们构造更高效的编码方案呢？

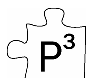
(1) 假设除了热身问题中给出的频率外，你还知道在每条消息中，B 字符后面总跟着 A 字符，D 字符后面总跟着 C 字符。是否可以设计一种编码方案使得该消息所需的比特数更少？

其实，真正实用的术语是将很长的短语精简为一两个词。让我们来看看能否模拟一下这种情况。

(2) 假设除了热身问题中给出的频率外，你还知道在每条消息中，D 字符后面总跟着 C 字符，C 字符后面总跟着 B 字符，B 字符后面总跟着 A 字符。是否可以设计一种编码方案使 60 个字符的消息所需的比特数再少些？哪些短语可以被精简为术语？

英语一向以几乎所有规则均有“例外”著称（例如，“Iraq”这个单词的“q”后面就没有“u”）。这样的例外使得在设计最优的编码方案时要为“q”和“qu”都设定相应的码字。但是如果这样的“例外”层出不穷，就不值得增加额外的码字了。下面用我们的迷你语言来模拟一下这种情况吧。

(3) 假设除了热身问题中给出的频率外，你还知道在每条消息中，D 字符后面总是跟着 C，C 字符后面总是跟着 B，B 字符后面跟着 A 的概率是 13/15。为了使 60 个字符的消息占用的比特数最少，应如何设计编码方案？



2.3 巧分弹珠

你的朋友卡罗尔热衷于为孩子们准备袋装的弹珠作为礼物。周一那天，她手上有 5 个红色弹珠、6 个蓝色弹珠和 7 个白色弹珠。

热身问题

她要把这些弹珠分装成几袋，才能使每个袋子内的弹珠都不相同？两袋弹珠不相同是指至少有一种颜色的弹珠数目不相同。例如，一个袋子内装有 2 个红色弹珠和 1 个蓝色弹珠，另一个袋子内装有 1 个红色弹珠和 1 个蓝色弹珠，或者有 1 个红色弹珠和 2 个蓝色弹珠，那么这两袋弹珠就是不同的。

热身问题解答

简便起见，我们用颜色的第一个字母来表示弹珠：R（红色）、B（蓝色）和 W（白色）。卡罗尔可以将弹珠分成 10 袋：R、B、W、RR、BB、WW、RB、BW、RW 和 BWW。

这只是热身而已。

(1) 到了周二，卡罗尔依旧有 5 个红色弹珠、6 个蓝色弹珠和 7 个白色弹珠。但是为了让弹珠的分装更多样化，她决定这次任意两袋之间的差异至少需要两次“进出”操作才能消除。所谓“进出”是指向袋子里增加一个弹珠或者从袋子里拿出一个弹珠。例如，R 和 RR 这两个袋子的差异只需要一次“进出”操作就能消除（向 R 的袋子里增加一个 R），RW 和 RB 这两个袋子的差异需要两次“进出”操作才能消除（拿出一个 W，并增加一个 B）。如果任意两个袋子之间的差异都需要两次“进出”操作才能消除，她能把这些弹珠分成几袋呢？

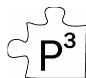
到了周三，卡罗尔收到一个袋子，但是她不能打开它。

(2) 她只知道袋子里有 18 个弹珠，有红、蓝、白 3 种颜色，每种颜色至少有一个弹珠。在打开袋子之前，她接到了一个电话，电话那头问她：“如果派对上有 8 个孩子，你能保证将袋子里的弹珠分成不同的 8 袋吗（比如，任意两个袋子之间至少有一次‘进出’的区别）？如果不能保证，那么能分成不同的 7 袋给 7 个孩子吗？如果可以保证，那么能分给 9 个孩子吗？”卡罗尔应该如何回答呢？

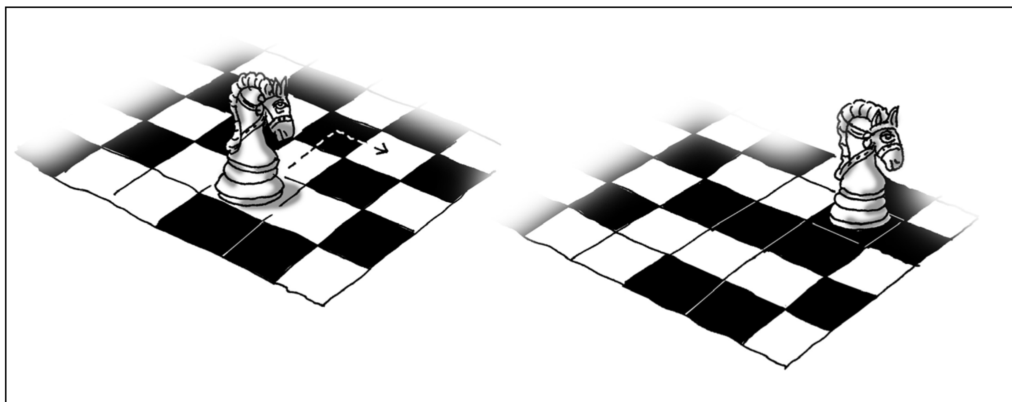
(3) 到了周四，卡罗尔还是只知道自己有 18 个弹珠，3 种颜色，每种颜色至少有一个弹珠。她还是像周二一样，希望孩子们能拿到不同的弹珠。所以这次她想要任意两个袋子之间至少有两次“进出”的区别。这种情况下，她能保证为几个孩子准备弹珠礼物呢？

(4) 到了周五，由卡罗尔的朋友黛安娜（Diane）来分装弹珠。黛安娜保证实现以下 4 点：(i) 各

袋弹珠都不相同（至少有一种颜色的弹珠数量不同）；(ii) 一共有 18 个弹珠；(iii) 白色的弹珠最多，蓝色次之，红色最少；(iv) 她最多只能分装成 7 个不同的袋子。假设黛安娜非常擅长分装弹珠，那么这 18 个弹珠里最多可以有几个红色的？



2.4　颜色反转

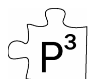


经典的国际象棋游戏“骑士巡游”（knight’s tour）要求从棋盘上任意给定的方格开始移动骑士（马），走遍棋盘上的每一方格，且每个方格只能进入一次。你可以在网上搜索这个游戏，为解决下面这道更难的谜题找点儿灵感。事实上，你可能会认为这道谜题是根本解不开的。

这道谜题还是关于骑士的，骑士可以先沿垂直方向移动两个方格，再沿水平方向移动一个方格，也可以先沿水平方向移动两个方格，再沿垂直方向移动一个方格。骑士按 L 形沿途走过的 3 个方格将被反转颜色（不包括起始格，但是包括终点格）。要求以棋盘上任意给定的方格为起始位置，以 L 形走法移动骑士，骑士所到方格的颜色会反转。我们假设骑士起始方格的颜色会首先被反转。

请注意，骑士可以多次反转同一个方格的颜色，但是最终只能反转奇数次。

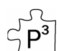
(1) 骑士是否可以将棋盘每一个方格的颜色都反转奇数次？如果可以，要走多少步？



2.5　赛程编排 

有一项赛事，共 12 支校队参加，简便起见，记作 A、B、C、D、E、F、G、H、I、J、K 和 L。他们将在连续的 11 天内，在 6 块场地上举行比赛。每个队都必须和其他 11 队比赛一次。每个队每天只打一场比赛。

热身问题

假设一共只有 A、B、C 和 D 4 支队伍。他们将在 3 天内，在两块场地上举行比赛，每个队都必须和其他 3 队比赛一次。应该如何编排赛程？

热身问题解答

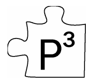
我们将赛程排成两列，每一列对应一块场地。以第一行为例说明，表示第一天，A 和 B 在场地 1 举行比赛，C 和 D 在场地 2 举行比赛。

```
AB CD
AC DB
AD BC
```

现在，参与的队伍不只是 4 支而是 12 支，而且因为这项赛事由来已久，所以赛程的编排需要遵循一些传统：A 必须和 B 在第 1 天比赛，和 G 在第 3 天比，和 H 在第 6 天比。F 必须和 I 在第 2 天比，和 J 在第 5 天比。K 必须和 H 在第 9 天比，和 E 在第 11 天比。L 必须和 E 在第 8 天比，和 B 在第 9 天比。H 必须和 I 在第 10 天比，和 L 在第 11 天比。因为 C 和 D 是新参赛的队伍，所以对他们没有限制。

(1) 有没有可能编排一个 11 天的赛程，同时满足以上各条件？

乍看之下会觉得困难，但是，请再仔细研究一下热身问题。请注意不包含 A 队的那列，它们之间都是有联系的。如果找到了其中的规律，你就能解决这个更难的问题。



2.6　生物中的分形学 

生物学家研究的对象不仅有基因，还包括基因组、蛋白质组及相互作用组等，基本上所有的“组”，也就是一切跟整个物种相关的事物，都属于他们的研究范围。生物学的研究成果，可能会伤害许多人脆弱的自尊。

例如，我们人类的基因数量其实和老鼠的基本相同，并且其中大部分基因在形态和功能上非常相似。我们认为自己是高级的生命形式，但是基因组本身并不支持这一观点。因此差别应该存在于基因之间的相互作用，正是这种相互结合又相互排斥的网络结构造就了每个物种的与众不同。

一直困扰生物学家的一个难题是，为什么蛋白质的交互网络具有特定的拓扑结构。一般来说，大部分蛋白质具有少量的连接，但是少数蛋白质却具有大量的连接。我们称那些具有较高连接数的蛋白质为 Hub 蛋白。这样的网络结构往往被称做“无尺度网络”（scale-free network），不由令人联想到曼德尔布罗特（Mandelbrot）提出的分形结构，还有我们最熟悉的万维网其实也早已成为“无尺度网络”。你可以按照如下规则构造一个“无尺度网络”：使 70%的节点有一条边，另外 30%的节点有两条以上的边；在这些有两条以上边的 30%节点里，又有 70%的节点有两条边，另外 30%的节点有三条以上的边；在这些有三条以上边的 30%节点里，70%的节点有 3 条边，另外 30%的节点有 4 条以上的边；以此类推。

有一种理论认为“无尺度网络”具有良好的容错性。理由是：突变是随机发生在基因组中的，大部分的突变只会损害那些具有少量连接的蛋白质，因此可以假定突变并不是很重要。当然突变也可能损害 Hub 蛋白质，这将是致命的突变，但是 Hub 蛋白非常稀少，因此致命的突变也是很罕见的。

为了使蛋白质网络具有高容错性，当突变发生时，我们希望没有受到损害的蛋白质之间至多需要两个连接就可以交互。一个典型的问题就是，要确定为满足此条件所需要的连接数。

假如一共有 4 个蛋白质节点，那么一个简单的正方形交互网络就可以满足要求（如图 6 所示）。无论删除哪一个节点，剩下的节点两两之间至多需要两个连接即可交互。

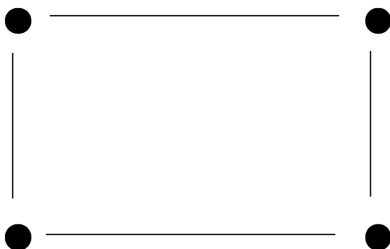
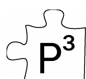


图 6　4 个节点的蛋白质网络，任意两个节点之间只需一条或两条连接即可交互，即使删除一个节点，它仍具备以上性质

热身问题



如果在网络中存在受损节点的情况下，节点之间至多通过两条连接仍可交互，我们将这种情况称为“两节点之间的受损距离为 2”（wounded distance two condition）。如果蛋白质网络有 6 个节点，每个节点至多有 3 条连接，有没有可能用 10 条或更少的连接使得任意节点间的受损距离为 2？

热身问题解答

图 7 展示了一个有 9 条连接的蛋白质网络的解决方案。

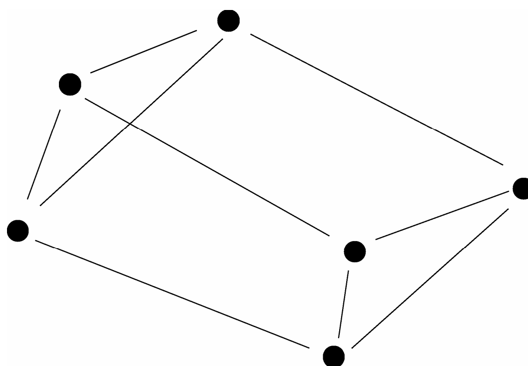


图 7　6 个节点的蛋白质网络，其中任意两个节点之间的连接路径有一条或两条，即使删除一个节点仍满足此条件

---

(1) 如果一共有 8 个节点，每个节点至多有 4 条连接，有没有可能用 16 条连接使得任意两节点间的受损距离为 2？

(2) 如果一共有 12 个节点，每个节点至多有 5 条连接，要实现任意节点间的受损距离为 2，最少需要的连接数是多少？

(3) 如果一共有 12 个节点，但任意节点的连接数没有限制，要实现任意节点间的受损距离为 2，最少需要的连接数是多少？

(4) 现在来考虑一个有 108 个蛋白质节点的网络，我们还不知道蛋白质之间所有的交互连接是如何分布的。如果任一个节点最多有 60 条连接，要实现任意节点间的受损距离为 2，这个蛋白质网络需要的最少连接数是多少？请找出一个少于 600 条连接的解决方案。

2.7　轻松分馅饼



如果你让小孩子为大家分馅饼，他们一般会先切一块给自己，然后把刀交还给你。成年人考虑到效率，通常会采用十字形的切法纵横地切分馅饼，但孩子们会觉得这样的切法未免也太无私了。这道谜题便是试图帮助你找回内心的那份童真。

你需要设计一系列的切法，将一块正方形的馅饼分成大小相同的几块，与人分享。我们称最终分给每个人的馅饼块为“最终块”。切分的规则如下。

(1) 每一刀都必须垂直于馅饼表面往下切，且要平行于馅饼未切时的某一条边。

(2) 所有的最终块体积均相同，（根据规则 1）表面积也相同。

(3)（儿童切割规则）每一刀都必须产生一块最终块，最后一刀除外，因为最后一刀会产生两块最终块。

我们的目标是使所有最终块的周长总和最小，显然，可能只有那些懒惰的，或聪明的，或者又懒惰又聪明的孩子才会有这种想法。

热身问题

P³ 我们首先以图 8 的正方形馅饼为例。

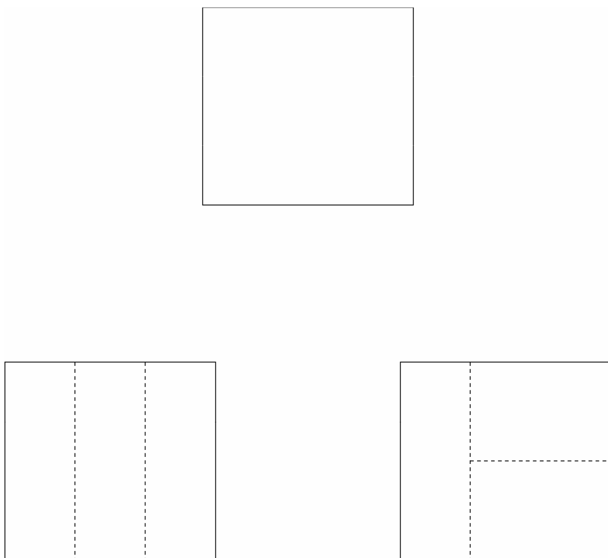


图 8　两种可行的将馅饼（上图）三等分的切法。左下图表示通过平行的两刀三等分，右下图表示通过垂直的两刀三等分

我们可以平行地切两刀（A），也可以垂直地切两刀（B）来将正方形馅饼三等分。这两种切法都符合上述的 3 条规则：最终块大小相同、每刀都平行于某一边界，且符合儿童切割规则。请问这两种切法中，哪一种所有最终块的周长总和较小？

热身问题解答

在平行切法（A）方案中，每块最终块的周长都是 1+1/3+1+1/3=8/3，所以 3 个最终块的周长总和为 8。在垂直切法（B）方案中，第一块最终块的周长为 8/3，其他两块的周长为 2/3+1/2+2/3+1/2=7/3，因此周长总和为 22/3。

现在轮到你了。

(1) 这次需要把馅饼五等分，请找出一种符合上述 3 条规则的切法，使得最终块的总周长最小。

接下来的问题，让我们假设是完全面向成年人的。因此，我们将抛弃儿童切割规则，但还是要遵守前两条。

(2) 在抛弃儿童切割规则后，有没有更好的方案使得五等分后的总周长更短？

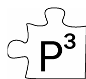
(3) 如果是要九等分呢？

提示　这道题的解法让人联想到俄罗斯套娃。

---

(4) 如果除了不需要遵守儿童切割规则之外，切分时还不需要平行于馅饼的某一条边，那么有没有更好的五等分方案使得总周长比第 2 题得到的更短？

你可以找个聪明的孩子试试这道题。观察孩子的反应定能让你乐在其中。以我的经验，最后总会有人以大笑收场。



第 3 章

运气——获得幸运之神的垂青

3.1　幸运轮盘赌[①]

高科技公司的面试通常都会涉及谜题。以下这道题虽然其设定非常暴力，却在面试中广为采用。我们来把它变得更有趣点儿。

我会将两发子弹放入一把六发的左轮手枪的两个相邻弹巢中。我将手枪对准你的头，扣动扳机，咔嗒一声，你还活着。轮盘随即旋转，到下一个弹巢，我准备再次扣动扳机。

热身问题

P³ 我可以现在就扣动扳机，也可以继续转动轮盘到下一个弹巢，再扣动扳机，对你来说哪种做法更好？

热身问题解答

对你来说，最好是轮盘不转动，即不要让我再转动一次轮盘。这是为什么？让我们用 E 来代表空弹巢，用 B 代表装有子弹的弹巢。

用左起第一个表示第一次用到的弹巢，如下是 6 个弹巢所有可能的组合形式，这些组合出现的概率都是相等的：

```
BBEEEE
EBBEEE
EEBBEE
EEEBBE
EEEEBB
BEEEEB
```

因为第一次你并没有死，所以留下以下 4 种等概率的组合形式：

```
EBBEEE
EEBBEE
EEEBBE
EEEEBB
```

如果我不转动轮盘，你有 1/4 的概率会死于我第二次扣动扳机。如果我转动轮盘，你有 1/2[②]的概率会死。所以你不会希望我转动轮盘。

现在假设我还要再扣动两次扳机，也就是一共开 4 枪。如果第二次开枪之后你存活下来了，那么弹巢的组合形式有以下几种情况：

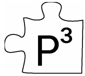
---

① 此题的轮盘赌指的是“俄罗斯轮盘赌”，是一种残忍的赌博游戏，赌具是左轮手枪和人的性命。——译者注

② 原文为 1/3，有误。——译者注

```
EEBBEE
EEEBBE
EEEEBB
```

(1) 在我第三次开枪之前，你想要我转动轮盘吗？第四次开枪前呢？如果开第一枪时你并没有死，那么使用最优策略，你的存活概率是多少？



3.2 法律逻辑

在大学的最后一年，我曾有过去法学院的想法。推理似乎是一件很好玩的事情，很多人（也许太多人）都在做这件事。但最后我还是选择了技术，因为在极大程度上，律师这个职业就是在分割一块已有的“财富蛋糕”，然后切一块留给自己，对社会来说是一个零和游戏。而技术类的职业却很有可能创造财富，扩大蛋糕的规模。当然，这只是过分简单化了的分析，但是我认为基本上是正确的。技术可以开辟新天地，而法律推理不过是在重走 4000 多年前就已经被美索不达米亚人开辟的道路。尽管如此，我的职业还是给我带来了和一些优秀的律师密切接触的机会。我见过他们辩论，也见识到他们的争辩是如何影响社会的。在这道题里，我将构建一个小型的公理系统来分析我认为正在发生的事情，然后给出一个适度的改进建议。

假设有一种用于治疗疾病 *S* 的新仪器（或新药）*D*。从法律逻辑的角度出发，考虑以下几个谓词：

`mayuse(x, D)` —— *x* 可能会使用仪器 *D*（即 *D* 是可用的）。

`hurtby(x, D)` —— *x* 被仪器 *D* 所伤。

`newdevice(D)` —— 仪器 *D* 是新的。

`sick(x, S)` —— x 患有 *S* 疾病。

`sueandwin(x)` —— *x* 起诉获胜的概率很大。

一阶谓词逻辑如下。

“存在 *x*，……”表示至少存在一个 *x*，具有省略号所代表的属性。

“所有的 *x*，……”表示所有人都具有省略号所代表的属性。

A→*B* 表示如果 *A* 为真，则 *B* 必为真。如果 *A* 为假，则 *B* 可真可假。

- **规则 1**：对所有的 *x*，`hurtby(x, D)`→`sueandwin(x)`

  解释：如果有 *x* 被仪器 *D* 所伤，那么 x 起诉获胜的概率很大。

- **规则 2**：存在 *x*，`hurtby(x, D) & sueandwin(x)`→对所有的 y，`not mayuse(y, D)`

  解释：只要存在一个 *x* 被 *D* 所伤后起诉获胜，就没人会再使用仪器 *D*。应当承认，这样的确有点极端了，但至少在美国，已经几乎做到了这一点。

- **规则 3**：对所有的 x，`sick(x, S) & not mayuse(x, D)`→`die(x)`

  解释：如果 *x* 患有疾病 *S*，但没有仪器 *D*，那么 *x* 就会死。因此，我们的假设是仪器 *D* 是至关重要的。

热身问题

P³ 让我们给出一个假设，然后来看看会有什么后续影响。假设仪器 *D* 是新的，并且存在如下的公理：

```
对所有的 Y，newdevice(Y)→存在 x，hurtby(x, Y)
```

请问将有什么后果？

热身问题解答

基于给定的公理，仪器 *D* 的发明将不可避免地导致诉讼，并且根据以下的推理，*D* 也不能救人性命。

```
存在 x，hurtby(x, D)→sueandwin(x)
存在 x，hurtby(x, D) & sueandwin(x)→ 对所有的 y，not mayuse (y, D)
对所有的 x，sick(x, S) & not mayuse(x, D)→die(x)
```

这显然是不可取的。如果仪器 *D* 只会伤害极少数的人，却能救很多人的性命，那么至少从功利主义的角度来看，仪器 *D* 总体上还是对社会有益的。有没有可能在法律诉讼时把这个因素也考虑进去呢？

也就是说，我们假定主审法官会将这个仪器在全世界范围内的成本效益分析告知陪审团。如果与为仪器所伤的人相比，这仪器确实救了更多的人，那么陪审团在做决定时可能会考虑这点。这会降低诉讼成功的概率。

因此，我们新增如下谓词以强化逻辑：

"MoreThanFraction(*f*) *x* ..."表示有多于比例 *f* 的人（包括 *x*），具备省略号所表示的属性。

这使得我们可以定义新的规则 1，针对一些有风险但总体上有益的仪器，我们将在规则 1 中引入一个比例，如 0.02（2.0%）。

- **规则 1**：MoreThanFraction(0.02) *x* hurtby(*x*, *D*)→sueandwin(*x*)

  解释：使用过仪器 *D* 的人中，如果有 2%以上的人受到伤害，那么这些人可以起诉并胜诉。胜诉的人必须曾被该仪器所伤，且该仪器必须已经伤害了 2%以上的病人。

假设接受治疗的人中只有千分之一为仪器所伤，那么应用这条新规则后，你会发现，将不再发生诉讼。

这可能是正确的想法，但是仍然存在一些问题。首先，即使受伤的有效概率实际上是阈值 2% 的 1/4（也就是 0.005），但是在仪器应用早期，是很有可能超过这个阈值的。

(1) 如果每个病人被仪器伤到的概率是 0.005，那么在最初的 50 个病人中，发生一起事故的可能性有多大？

提示　你可以用概率论来解答此题，也可以写一个小程序模拟该统计概率。

我们还忽略了一个问题。毕竟，仪器的事故不一定都是独立的。例如，在某些医院，仪器 D 发生事故的概率可能远远高于其他医院。假设在 2000 个病人中，总共只有 10 个人受伤，但这 10 个人都是在同一家医院接受治疗的，而这家医院总共接待的病人是 100 个。针对这样的情况，又该做些什么呢？现在，作为一个数学家，是你提出参考意见的时候了。首先，假定对每家医院而言，胜诉的阈值降低到 1%。

(2) 假设 4000 个病人中，有 18 个为仪器所伤。一共有 8 家医院，每家医院接待 500 个病人。每个病人被仪器所伤的概率是 0.005，并且治疗过程中仪器伤害病人是跟医院无关的，那么至少存在一家医院的事故发生率超过 1%的概率是多少（也就是有超过 6 个病人为仪器所伤）？

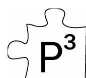
(3) 假设患者的分布是极不均匀的，其中 7 家医院每家只接待了 200 个病人，另外一家医院治疗了其余的病人。那么在相同的条件下（总共有 18 个病人为仪器所伤，每个病人被仪器所伤的概率是 0.005），至少存在一家小医院满足 3 个以上的病人为仪器所伤的概率是多少？

迄今为止，我们的分析显示诉讼的发生率还是相对较高的。毕竟，就算每个病人被仪器伤害的概率是 0.005，而且每家医院都很小心地使用仪器，根据上述阈值试验的分析，医院还是很容易陷入官司。但是，假设我们把诉讼成功的事故发生率重新从 1%提高至 2%，在 2%的阈值下，如果仍有医院达到甚至超过此百分比，那就说明在这家医院里，病人被仪器所伤的概率很有可能超过 0.005，陪审团综合这些统计数据就能推断出这家医院玩忽职守。

(4) 假设事故发生率超过 2%的医院就是糟糕的医院。假定每家医院接待 500 个病人，每个病人被仪器所伤的概率是 0.005，且这个概率跟医院无关，那么至少存在一家医院事故发生率超过 2%（有 10 个以上病人为仪器所伤）的概率是多少？

(5) 如果有 7 家医院每家只接待 200 个病人，另外一家医院接待了其余的 3600 个病人，其他前提同上一题，那么至少存在一家医院事故发生率超过 2%的概率是多少？

结论是：一家医院如果想要启用一个新设备，最好能够频繁地使用它。



3.3 筹码盒游戏 

有些时候，一个看似毫不重要的变化能完全改变一个问题的性质，这道谜题将很好地体现这一点。此题所涉及的游戏有点类似于“直冲云霄!”那个游戏。

在你面前有偶数 n 个不同颜色的筹码，还有 n 个完全相同的、不透明的上锁的盒子。你将看着对手把 n 个筹码依次放进 n 个盒子里。然后他将所有的盒子放进搅拌盆里充分地翻滚。随后，他将盒子从搅拌盆里取出，放在你的面前。实现的效果就是你分不出哪个盒子里有哪个颜色的筹码。

接下来介绍游戏规则：对于每个颜色，你可以指出 $n/2$ 个可能装有此颜色筹码的盒子，在指定完盒子里所有筹码的颜色之前，盒子是不能打开的。如果猜对了所有的颜色，你就赢得游戏，否则你就输了。

粗粗一看，你获胜的概率大约是（1/2）^{n}，但其实概率能更高。

热身问题

假设一共只有两个筹码，蓝色和红色各一个，并且有两个盒子。因此你要确定的是哪个盒子装有红色筹码，哪个装有蓝色筹码。要怎么猜才能使你获胜的概率是 1/2?

热身问题解答

比如说，猜红色筹码在左边的盒子里，蓝色的在右边的盒子里。你要么两个都猜对，要么两个都猜错。你也可以为红色和蓝色都指定同一个盒子，这样就不会两次都猜错，但是对这个游戏来说，猜错两次并不见得比猜错一次差。

让我们来看看如何推广。这次假设有 4 个筹码，分别是黑色、白色、红色和绿色。你将为每个颜色的筹码指定两个可能的盒子。我们将盒子按 1、2、3、4 编号。简便起见，你的猜测将通过颜色和盒子编号的配对表示，例如：

黑色: 1， 2

白色: 2， 4

红色: 1， 3

绿色: 3， 4

(1) 4 个筹码，每个颜色猜两个盒子，筹码和盒子的各种组合是完全等概率的。在这种情况下，有没有一种策略使得你获胜的概率至少为 1/6?（上述给出的示例可能无法实现该目标。）

(2) 如果有 6 个筹码，每个颜色猜 3 个盒子呢？

(3) 如果推广到 n 个筹码（n 是偶数），每个颜色猜 $n/2$ 个盒子的情况呢？

现在我们对游戏规则稍加修改，虽然只是很小的变更，但却能改变一切。在旧规则下，每个颜色你能猜 $n/2$ 个盒子。但在新规则下，你对每个颜色都进行一次初始猜测，然后根据盒子中筹码的实际颜色来确定接下来猜测哪一个，以此类推。

下面是一个针对黑色（共有 4 种颜色）给出的例子。

```
初始猜测为盒子 1；
打开盒子 1 验证，
    黑色，获胜，
    红色，尝试盒子 2，
    白色，尝试盒子 3，
    绿色，尝试盒子 4。
```

简便起见，我们将上述的流程简化书写如下：

```
黑色筹码的猜测流程：1；黑→胜，  红→2，  白→3，  绿→4
```

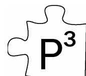
在打开盒子核对颜色之前，你必须已经为所有的颜色都提供了这样的初始猜测流程，而且每个流程之间是能不分享任何信息的。如果每个颜色都能在 $n/2$ 次甚至更少的猜测次数内答对，你就获胜。

我们可以把游戏的过程想象如下：不同的筹码颜色对应不同的代理人，每个代理人将按照上述的流程检查盒子，当然，代理人检查的流程可能互不相同。对于某个特定的颜色，对应的代理人将进到一个放有盒子的房间，严格依照你给出的流程检查盒子里的筹码颜色，不允许不按流程乱翻盒子。执行完流程内的所有步骤后，代理人离开房间，他们之前不能交流，除非他输了，因为那也就意味着游戏结束了。

让我们继续这个场景：某个代理人是输还是赢，由裁判决定。如果所有的代理人都赢了，那么你将获胜；否则，你就输掉了游戏。结果可能会有点出乎意料，但在新规则下你获胜的可能性会大很多。

(4) 如果有 4 个筹码，每个颜色可以猜两个盒子，在存在代理人的新规则下你获胜的概率有多大？（提示：你获胜的概率将超过 40%。）

(5) 如果有 6 个筹码，每个颜色可以猜 3 个盒子，在新规则下获胜的概率有多大？



3.4　反馈系数

当你高速行驶在一条羊肠小道时，你是否曾为自己的高超车技而自鸣得意呢？如果没有，请想象另一种驾驶方法：事先研究好这条羊肠小道的详细地图，推测出在每个特定的时间点，车轮应该转向多少，踩油门的力度应该多大，随后你蒙上眼睛在这条道路上穿行。即使没有任何障碍物，这也已经超出了我们大部分人的记忆容量和数学能力。

事实上，我们很少会注意到，开车也是一项脑力劳动。也许是因为，在开车时需要根据眼睛所见，不断作出调整。因此整个驾驶过程其实就是由一系列非常短期的驾驶计划（至多几秒）组成的。驾驶员有一个总体的目标，即开到某个目的地，但是具体的计划却是渐进且自适应的。这样的驾驶策略需要较少的脑力，并且能更好地应对环境的改变。

任何一个路人都能理解这点，但是我们需要量化。为了可以更具体点儿，我们来思考下面这个游戏。考虑一个标准的跳棋盘，8 行 8 列，如图 9 所示。

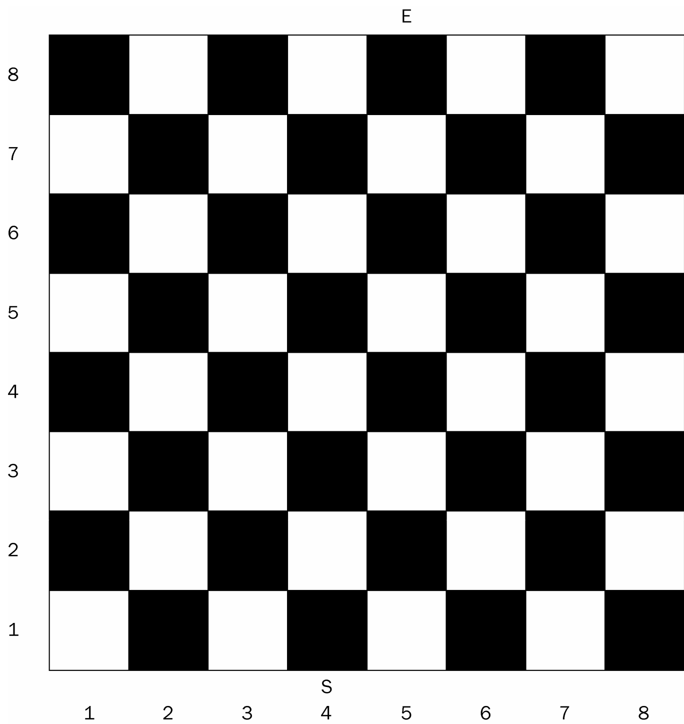


图 9　目标是从 S 走到 E，始终走黑格，不能走到棋盘外面

你要从第 1 行第 4 列（标记 S 上方的黑格）走到第 8 行第 5 列（标记 E 下方的黑格）。每一步都是走斜对角，从黑格到黑格，也就是前进一行，然后向左或向右一格。如果走到棋盘外面，或

者走到了第 8 行但是没有到达指定的格子，你就输了。

每一步，你可以对准右边，也可以对准左边。但是到达你所对准的格子的概率是 Pgood，稍后会讨论这个值。我们将讨论两种策略：带反馈（FeedYes）和无反馈（FeedNo）。

带反馈的策略可以根据第 $i-1$ 步的结果来确定第 i 步的对准方向。无反馈的策略必须在游戏一开始就确定第 i 步的对准方向。

下面通过一个例子来说明这两种策略的差异。假设你要从第 1 行第 4 列走到第 3 行第 4 列，且 Pgood 为 0.9。如果采用带反馈的策略，第一步你可能会向右对准，若你确实走到右对角的邻接格（概率为 0.9），第二步你就会向左对准。但是如果第一步走到了左对角的邻接格（概率为 0.1），第二步你就会向右对准。结论是，你到达目的地的概率是 0.9。如果采用无反馈的策略，你的计划可能会类似于“第一步向右，第二步向左”。有两种情况，你最终可以到达目的地：第一步按原计划向右走，第二步也按原计划向左走（概率是 $0.9\times0.9=0.81$）；或者是第一步背离原计划实际上向左走，第二步也背离原计划而向右走（概率是 $0.1\times0.1=0.01$）。因此结论是，在无反馈策略下，你到达目的地的概率为 0.82。我们定义反馈系数（feedback dividend）为：带反馈的最优到达概率除以无反馈的最优到达概率（最优表示你是全力以赴的）。在这个例子里，反馈系数为 0.9/0.82[①]。

热身问题

P³ 不考虑起始点和终点的位置，是否存在一个 Pgood 的值，使得反馈系数为 1？

热身问题解答

如果 Pgood 的值是 0.5 或者 1，那么反馈系数即为 1。Pgood 是 0.5 时，对准哪里都无所谓。Pgood 是 1 时，就完全不需要反馈了。Pgood 为其他值时，反馈系数都会超过 1。

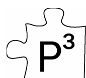
现在给出完整的问题，基于最初的设定，你的起始位置是第 1 行第 4 列，终点是第 8 行第 5 列。

(1) 如果 Pgood 是 0.9，那么在带反馈和无反馈两种策略下，到达终点的概率分别是多少？

(2) 要使反馈系数最大，Pgood 应是多少？反馈系数是多少？

第二个问题的答案可能会出乎你的意料，跟直觉告诉你的完全不同。

(3) 如果我们去掉最右边 3 列和最左边 2 列，那么为了使反馈系数最大，Pgood 应取什么值？假设走到棋盘外面会带来一定的损失。



① 原文为 0.9/0.81，有误。——译者注

第 4 章

推理——你在想什么

4.1　数字线索

某个数论学家最近失踪了。他的保险箱里可能有些资料能让警察顺藤摸瓜找到他。但问题是，如果强行撬开他的保险箱的话，它就会自动毁灭。因此我们必须推理出保险箱的密码。

还好，他留下了一些提示。密码涉及几对数字。每对数字，p 和 q，都有乘积($p \times q$)、最大公约数[gcd(p, q)]和最小公倍数[lcm(p, q)]。

举个例子，假设 p=10，q=25。这两个数的最大公约数 gcd(p, q)=5，因为 5 是能同时整除 10 和 25 的最大整数（整除是指余数为 0）。这两个数的最小公倍数 lcm(p, q)=50，因为 50 是能同时被 10 和 25 整除的最小正整数。最大公约数是两个整数的公有质因数的连乘积，在这个例子里，只有一个公有质因数 5。最小公倍数是两个整数的公有质因数和独有质因数的连乘积，在这个例子里，是 2、5 和 5。

数论学家留下的提示遵循以下几条规则。

1. 提示里包含了很多对正整数 p 和 q，对于每一对正整数，都有 $p \leqslant q$。

2. 所有的 p 和 q 都是两位数（即在 10 到 99 之间）。

热身问题

P³ 假设我们已知某一个 q=18，但是不知道 p 的值。并且已知 gcd(p, q)=6，lcm(p, q)=36。那么 p 是多少？

热身问题解答

36 的质因数是 2、2、3 和 3，18 的质因数是 2、3 和 3，6 的质因数是 2 和 3。因此我们知道 p 肯定含有质因数 2 和 3，因为 gcd(p, q)=6，所以 6 必须能整除 p。另外，因为 lcm(p, q)=36，那么 p 和 q 中有一个必须含有两个 2，而 q 只含有一个 2，因此 p 一定含有两个 2，因此 p 的质因数是 2、2 和 3，也就是 p=12。

基于上述的 2 条规则，以下是前三条提示。

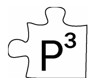
(1) 第一对 p 和 q，已知 lcm(p, q)=60，$p \times q$=240，那么 p 和 q 分别是多少？

(2) 第二对 p 和 q，已知 $p \times q$=140，gcd(p, q)=2，那么 p 和 q 分别是多少？

(3) 第三对 p 和 q，已知 lcm(p, q)=35，那么 p 和 q 分别是多少？

数论学家留下的另外一条已被警方解密的提示是：如果走到了这一步，说明你们做得很不错。现在是最后一条提示。

(4) 开启保险箱的密码是由前三条提示推理出的 5 个数字组成的一个数字序列。该数字序列有如下性质：每两个相邻的数的最大公约数呈从左到右严格递增趋势，但是所有的这些最大公约数都是一位数。请问开启保险箱的数字序列是多少？



4.2　智力游戏 



我们要玩一个跟著名的棋盘游戏“珠玑妙算”[①]很类似的游戏。我在脑子里想一个 5 位的二进制数，例如 10101，由你来猜。这就是所谓的“比特谜题”。每次你给出一个答案后，我都会告诉你，里面有几位是正确的（所谓正确，也就是正确的数字出现在正确的位置）。

例如，你猜的数字是 10110，但其实我的秘密数字是 10101，因此，你的答案中有 3 位是正确的数字，且在正确的位置上，至于具体是哪 3 位，我不会透露给你。我想的其他秘密数字也可能符合有 3 位正确的条件，比如 00100。

热身问题 1

P³ 事实上，当你猜测我的秘密数字是 10110 时，符合 3 位数字正确的数有哪几个？

---

① 英文为 Mastermind，是一种可供两名玩家使用的密码破译棋盘游戏，在 1970 年由以色列电讯专家 Mordecai Meirowitz 发明。——译者注

热身问题 1 解答

有 10 个数字符合上述条件，它们是 10101、10011、10000、11111、11100、11010、00111、00100、00010 和 01110。

热身问题 2

如果你猜测我想的数字是 10110，然后被告知 5 位数字都不正确，那么我想的数字可能是多少？

热身问题 2 解答

只有一个序列是符合要求的，那就是 01001，只需简单地对每一位求反即可。

热身问题 3

如果你的猜测和我的回答依次如下，那么秘密数字是什么？

00000 —— 2 位正确

01000 —— 1 位正确，因此第二位数字肯定是 0

00100 —— 3 位正确，因此秘密数字形如 x01xx

01110 —— 3 位正确，因此秘密数字形如 x011x

11100 —— 1 位正确，因此秘密数字形如 0011x[①]

00001 —— 3 位正确，因此最后一位是 1（和第一次猜测相比较）

热身问题 3 解答

所以秘密数字是 00111。不过这些猜测并不存在任何特定的规律，我们应该可以做得更好。

---

(1) 要确定一个 5 位的数字序列（不管是什么），最少猜测几次就一定能找到正确答案？请记住，你不需要作出一次完全正确的猜测，只要在最后能根据我的回答推出秘密数字就可以了。

提示　你不难找到一种只要猜 5 次就能确定答案的解法，先试试找出猜 5 次的方案。但这并不是最优的，你可以做得更好。

① 实际上到这一步即可确定数字是 00111。——译者注

(2) 假设我们修改游戏规则，增加点儿难度：你可以猜若干次，但是我会在所有的猜测都结束后才作出回答。在这种情况下，你猜多少次就一定能破解秘密数字？

现在，我不再那么友好了。你先作出一个初始的猜测，但是我永远不会回答你的问题。像问题(2)一样，在你作出所有的猜测后，我才会回答，而且只会“间接”地回答。我的答案一共有如下 3 种形式。

(i) 你这次猜正确的数字位数跟上一次的一样（S）。

(ii) 你这次猜正确的数字位数比上一次多（+）。

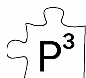
(iii) 你这次猜正确的数字位数比上一次少（–）。

我只会说这些。所谓“正确”还是同样的意思，即正确的数字出现在正确的位置上。

(3) 按照我只在最后才作出“间接”回答，并且不回答第一次猜测的游戏规则，还有可能猜出秘密数字吗（不管这个数字是什么）？如果可以，那么把第一次猜测也算上的话，你一共猜多少次就一定能找出秘密数字呢？

(4) 如果我在你作出猜测后立即作出“间接”回答，为了找出秘密数字，你需要猜多少次？

(5) 推广一下，如果秘密数字的位数为 N，且是基数为 b 的 b 进制数，其中 b>2，那么你需要猜多少次？例如，如果基数 b 是 10，秘密数字的每一位便可以是 0 到 9 中的任意数字。如果我在你作出所有的猜测后再回答，就需要猜 $1+(b-1)\times N$ 次。但我认为这应该不是最优解。



4.3 “拒”中生智

了解大量数据的途径之一便是借助几个数的统计特征值，比如最小值、最大值及各种平均值等，这一类统计信息可以反映出数据的整体性质。有时候，一些特征值就足以反映出每个个体的信息。这就是为什么隐私保护的拥护者把一些只提供统计信息的数据库也看做隐患：只要拥有足够的统计信息，往往就能推测出个人数据。

考虑如下一个简单的两人游戏，提问者为昆廷（Quentin），回答者为罗萨尔芭（Rosalba）。昆廷只能就一组数字的整体性质进行发问，例如，这些数字是否都是整数，是否各不相同，它们的各种统计值（平均数、中位数、最小数及最大数等）是什么。

罗萨尔芭总是说实话。然而，如果她发现自己的回答也许会暴露这组数字的具体内容，就会拒绝回答。但是，正如我们接下来要看到的，拒绝回答也能让人窥得端倪。当然有时候，她也会主动透露点儿信息，只是为了让游戏更好玩。

热身问题

罗萨尔芭：“一共有 5 个不同的整数。”

昆廷：“最小值是多少？”

罗萨尔芭：“15。”

昆廷：“最大值是多少？”

罗萨尔芭：“我不能告诉你，不然你就能猜出来了。”

P³ 请问是哪 5 个数？

热身问题解答

因为这些数各不相同，所以只有当最大值是 19 的时候，我们才能根据最小值是 15，立即推断出所有的 5 个数。因此，这组数字为 15、16、17、18 和 19。这只是一个简单的热身，游戏将变得越来越有趣。

在继续深入之前，我要带你再回顾一下平均数和中位数的概念。*平均数*指的是一组数据的和除以这组数据的个数所得的值。例如， 20、22、22、40 和 101 这 5 个数的平均数为 205/5= 41。而把所有的数据从大到小或者从小到大排列，中间位置的那个数据就是这组数据的*中位数*（在我们的例子中数据的个数总是为奇数）。

(1) 罗萨尔芭：“一共有 5 个整数，但是可能有重复的数。”

昆廷：“最小值是多少？”

罗萨尔芭：“20。”

昆廷：“以下的问题中，有哪一个是我即使知道了答案也无法推断出所有数字的：不一样的数的个数，平均数，最大值或者中位数？”

罗萨尔芭：“只有中位数。”

昆廷：“太好了，那我知道答案了。”

请问是哪 5 个数字？

(2) 罗萨尔芭：“一共有 7 个整数，可能会有重复的数。”

昆廷：“最小值是多少？”

罗萨尔芭：“20。”

昆廷：“以下哪个值是你愿意透露给我的（也就是即使我知道了也不能推断出所有的值）：平均数、中位数和最大值？”

罗萨尔芭：“都可以说。”

昆廷：“那好，最大值是多少？”

罗萨尔芭：“21。”

昆廷：“我知道在平均数和中位数中，哪一个是你现在愿意告诉我的了。”

请问是哪一个，为什么？

(3) 罗萨尔芭：“有没有这样的情况，相比中位数，我更愿意告诉你平均数？”

昆廷：“可以给我点提示吗？”

罗萨尔芭：“我现在能想到一个例子，一共有 3 个数，其中有两个数是不相同的。”

请试一下找出这个例子。

(4) 罗萨尔芭：“有没有这样的情况，你需要知道最小值、最大值、平均值及中位数，才能确定这 5 个整数？”

罗萨尔芭：“迄今为止，我们猜的数据的量都不是很多。我只要给点儿提示，你就能找出所有的数据。但是只有这么点儿数据太没意思了，让我们来玩点儿更有挑战性的。

“在开始之前，让我来给你介绍一个新的整体性质：到某点的*总距离*。假设我们现在有 5 个整数，10、15、20、30 和 60，那么它们到 22 这个点的总距离即为(22-10)、(22-15)、(22-20)、(30-22)和(60-22)的总和。从数学角度来看，一组数据到 x 的总距离是每个数和 x 的差的绝对

值的总和。”

(5) 罗萨尔芭：“现在我们准备开始。这次一共有 17 个数，它们有重复。最小值是 30，平均值是 34，中位数是 35。”

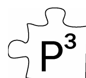
昆廷：“它们到 35 的总距离是多少？”

罗萨尔芭：“我不想告诉你，但是到 35 的总距离比到 38 的总距离少 5。糟了，我不该告诉你这个的。”

昆廷大笑:“你真的不应该告诉我，我已经知道所有的数了。”

请问是哪 17 个数?

(6) 假设有 1701 个数，并且罗萨尔芭透露的信息还是同上题一样，你能猜出这 1701 个数吗?



4.4　棘手的迷宫

传统的迷宫一般是一个矩形区域，由墙或者树篱大致封闭起来。人们从矩形的外面通过入口进入迷宫，目标是从出口走出来。有一个为人们所熟知的策略，能保证走出迷宫，那就是用你的左手扶着墙不停往前走，最后，你总会找到出口。

举例如下，考虑图 10 所示的一个简单的迷宫。

图 10　用左手扶墙在这个迷宫中不停往前走，你能从入口一直走到出口吗

从底部的入口进入迷宫，左手一直扶着墙，持续向前走。你首先到达 T 形墙下面的区域（虽然你永远也不会摸到 T 形墙），继续走，你将到达入口右上方的一个区域，随后是迷宫的左下角（标记 A 处），接着走到标记 B 处，最后来到标记 C 处，遇到死胡同。但是左手扶墙策略会带你走出这条死路，最后你将沿着左边的路来到出口。这显然不是最高效的穿越迷宫的方法，但却一定可行。

热身问题

P³ 只要迷宫的入口和出口都是开在外墙上的，这个方法就一定可行，你知道为什么吗？

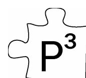
热身问题解答

想象一下，迷宫的外墙表面被漆成了黑色，内墙表面被漆成了白色。当穿行在迷宫之中时，你左手持蜡笔在墙上画出一条线。尽管你的路线可能不是很高效，但是却能保证，在走到出口之前（碰到黑墙），你不会走回到任何走过的白墙区域。因为入口与第一个出口之间漆成白色的墙面是有限的，所以你最终会出去碰到黑墙。（根据对称性，右手扶右墙也是行之有效的方法。）

但是，下面这个迷宫，完全跳脱了物理界的限制，因为这是一个网络迷宫。于是，不再有类似的左手扶墙的策略了——即使一直朝左走，你也可能陷入一个循环。

第一个网页的地址是 http://cs.nyu.edu/cs/faculty/shasha/papers/mazebook.d/f43.html。你的目标是跳转到一个网页，上面会告诉你（尽管是以暗码的形式）你走出迷宫了。好在这一路上都有提示。

(1) 我们的挑战是，要找到那个终点页，并且解密这一路上的单词和短语。这些加密的词语（构成了一句关于自然史的名言）及网页的其他部分中都会有一些提示。来试一下吧。



4.5　疯狂配比

试想一下，我们有两大水槽的液体。一个槽里装的是有剧毒的液体，一个装的是纯净水。我们的目标是将它们调配成一定比例的混合液。

我们有一条下水道可以用来排放废弃物。但是，剧毒的液体是非常危险的，就算是稀释过的，我们也要尽量少往下水道里排放。剧毒液体是离子化的，因此只要和水一接触，就能立即完美地混合在一起。

除此之外，我们还有两个不透明的容器，容量分别为 10 升和 7 升。容器上没有任何刻度线。要通过一个水龙头从水槽中接液体至容器，因为我们的客户很担心会因操作不当而引起污染。

我们可以从水槽接液体将容器灌满，也可以从一个容器倒液体至另一个容器，直至倒光容器内的液体或者装满另一个容器。我们还可以将纯净水或者剧毒液体倒回到原来的水槽。

热身问题

P³ 我们想调配出 10 升的液体，其中 40%是剧毒液，但不能往下水道里排放任何液体。应该怎么做？

热身问题解答

将 7 升的容器灌满剧毒液，然后倒入 10 升的容器。再将 7 升的容器灌满剧毒液，再一次倒入 10 升的容器，直到 10 升的容器装满。如此一来，7 升容器里还剩下 4 升。接下来将 10 升容器里的液体倒回装剧毒液的水槽，然后将 7 升容器里的液体倒入 10 升容器，加水到 10 升容器装满。

---

(1) 我们想要调配出 3 升的混合液，其中包含 2.7 升剧毒液。我们只想往下水道中排放不到 10 升的有毒液体。请问如何做到？

(2) 如果不能将任何剧毒液倒入下水道，我们能得到剧毒液含量为 2/9、其他为纯净水的混合液吗？

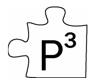
现在，化学家们要求我们调配出精确比例的混合液，我先来解释一下“浓度”这个术语。例如，剧毒液浓度为 25%的 10 升混合液就相当于含有 2.5 升的剧毒液和 7.5 升的纯净水。

另外，还有一个巨大的空桶供我们使用，我们只知道这个桶能装 100 多升的液体，但是却不知道它准确的容量是多少。

(3) 我们能将 7 升的容器装满剧毒液浓度为 26%的混合液吗？

(4) 假设我们想要调配出如下配置的混合液，纯剧毒液、含 1/2 剧毒液、含 1/3 剧毒液、含 1/4

剧毒液……含 1/50 剧毒液。你可以自行选择两个容器的容量。但要注意，小容器至少能装 1 升，大容器至多装 30 升。容器的容量不一定要是整数，甚至可以带小数。此外，你还有一个容量超过 100 升的大桶。要配置出特定比例的混合液，你要如何选择两个容器的容量？基于你给出的容器容量，要如何调配给定浓度的混合液？



第 5 章

优化——达到事半功倍

5.1　寻找地道 

想象如图 11 所示的一个 7 行 7 列的道路网格。

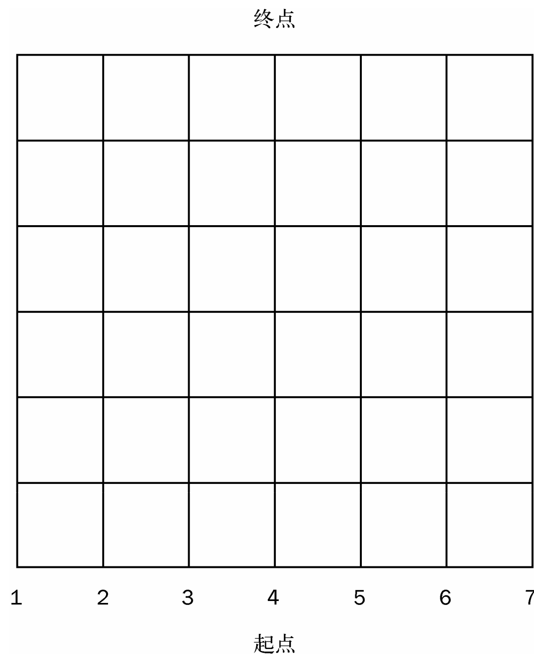


图 11　一群不法分子在道路网格的起点和终点之间挖了一条占地 8 个街区的地道

一群不法分子在底部挖了一条地道，地道的起始点是位于道路网格南边界的一个丁字路口（图上标记“起点”处），地道的终点是北边界的一个丁字路口（图上标记“终点”处）。地道是沿着街道挖的，但是可能有弯曲。而且它是一条很简单的道路（不会有死路，也没有回路）。你的目标是通过尽可能少的探测次数来找出地道的准确走向。

架设一台探测仪需要 1 个小时的时间。我们可以把探测仪架在十字路口或者街道中间。如果把探测仪架在街道上，你就能知道地道的走向是否和这条街道一致；如果把探测仪架在十字路口，你就能知道地道是否经过这个十字路口，如果经过的话，工程队会告诉你地道将延伸到哪条相邻的街道。

(1) 如果地道最长占地 8 个街区，且起点和终点的位置如图所示，那么最少需要多少台探测仪，才能确保在 1 个小时内确定地道的准确路径？

(2) 如果你只有一台探测仪，并且假设每小时你可以移动它一次，那么找出地道的准确路径最少需要多少时间？

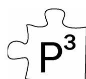
现在，假设探测仪只能确认地下是否有地道，但是无法确定地道的走向。用工程术语来说，也就是我们的探测仪只能定位探测，不能定向探测。

(3) 如果地道最长占地 8 个街区，且起点和终点的位置如图所示，那么最少需要多少台定点探测仪，才能确保在 1 个小时内确定地道的准确路径？

提示　请记住你可以把探测仪放在十字路口或者街道中间。

假设你有两个小时的时间，但是不能重用任何探测仪。

(4) 为了在两个小时内确定地道的准确路径，你最少需要用几台定位探测仪？



5.2　天生一对

“美满婚姻”（Marriage Success，简称为 MS）是一家婚姻咨询机构，给夫妻提供专业指导，使之更和睦地相处。MS 的想法很简单：对共同关心的各种标准，每对夫妻各自写下偏好。“我们的标准当然不是指外表和激情，因为这些因素大多数只在恋爱初期有影响力，而且往往会造成盲目的判断。我们想要了解的是日常生活中你们的价值观。一对幸福的夫妇，他们的喜好总是相容的，或至少是可以达到协调一致的。”

以下是人们希望配偶拥有的一些积极品质：骑行族（B）、有修养（C）、热情（E）、美食家（F）、徒步爱好者（H）、魔术师（J）、皮划艇爱好者（K）、电影爱好者（M）、有条理（O）、喜欢解谜（P）、富有（R）、戏剧爱好者（T）及帆板爱好者（W）。

假设用 X 和 Y 代表两种品质。X→Y 表示在 X 和 Y 中更偏爱 X。偏好是可以传递的，如果 X→Y 且 Y→Z，则能推出 X→Z。如果两个人的喜好一致，我们就称两个人是完全相容的。所谓喜好一致就是说，能够将夫妻双方关心的品质表示成一个统一的序列，使得他们的偏好都能在其中一一体现。如果两个人不完全相容，那么他们至少可能是部分相容的。所谓部分相容是指，只要每个人都至多舍弃一个偏好，他们就可以变成完全相容。

热身问题

假设鲍勃的偏好序列是 K→M→P 和 R→T。

爱丽丝的偏好序列是 O→P→R 和 W→T。

P³ 请问他们是完全相容的一对吗？

热身问题解答

是的。以下是他们俩一致的偏好排序：KOMPRWT。请注意，我们忽略了其他没有提到的品质（因为它们可以被放在任何位置）。排序的规则是，如果 X→Y，那么 X 即排在 Y 前面。然而，如果爱丽丝新增加了一个偏好 R→M，那么这对夫妇就不再是完全相容的了。因为对爱丽丝而言，P→R 且 R→M，可以得出 P→M，但是对鲍勃而言，却是 M→P。如果鲍勃舍弃 M→P 这个偏好，那么现在，他们俩的偏好序列如下：

鲍勃: K→P 和 R→T。

爱丽丝: O→P→R→M 和 W→T。

如此一来，他们俩共同的偏好排序如下：KOPRMWT。因此在这种情况下，鲍勃和爱丽丝部分相容。

“美满婚姻”要求人们在列出偏好时，不能存在自相矛盾的循环，例如喜爱 X 甚于 Y，喜爱

Y 甚于 Z，而喜爱 Z 又甚于 X。坏消息是，现实生活中，鲍勃和爱丽丝都是坚持己见的人，他们俩都各自列出了一堆的偏好，多到我不得不用图的方式来表示，详见图 12 和图 13。

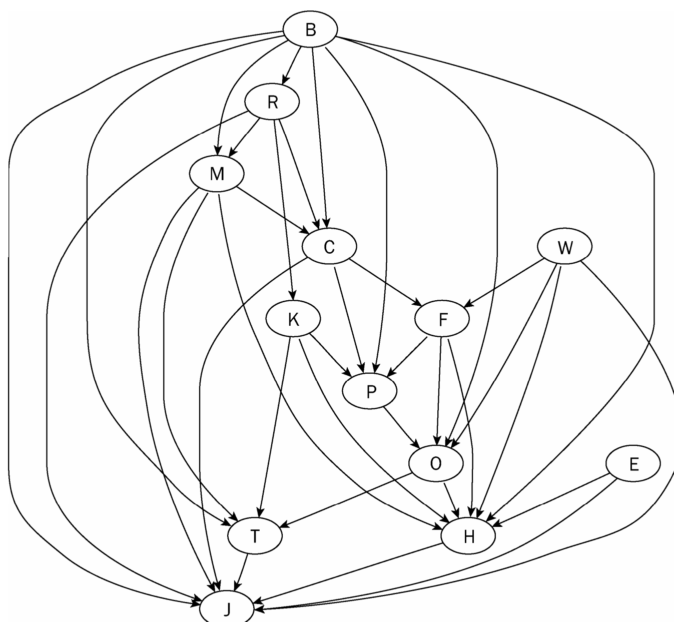


图 12　现实生活中鲍勃的偏好。请注意，有些品质他并没有提到，例如，他没有说明是希望爱丽丝有修养还是爱好帆板

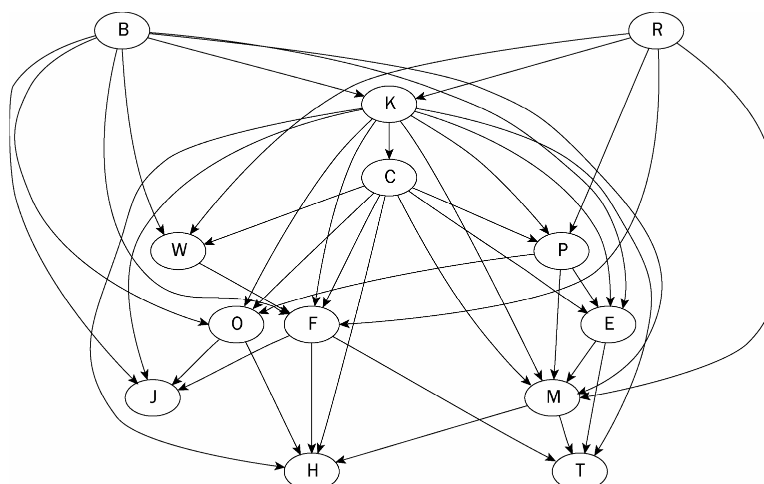
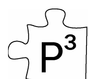


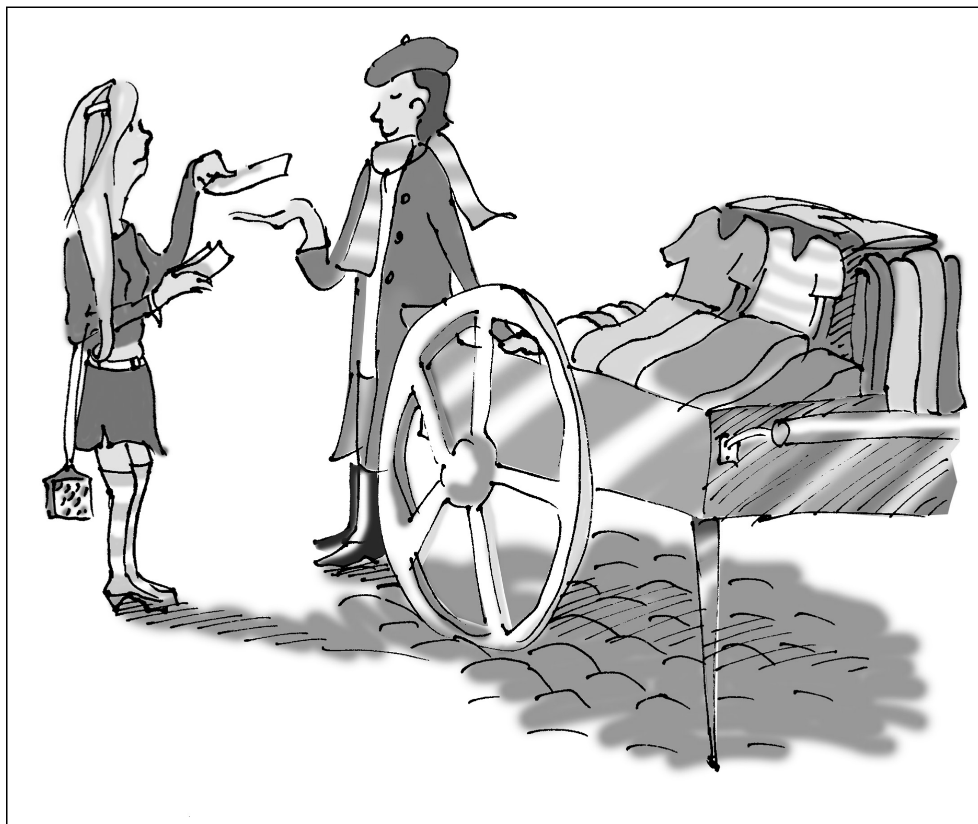
图 13　现实生活中爱丽丝的偏好。请注意，爱丽丝没有说明是希望鲍勃富有还是热爱骑行

(1) 请问鲍勃和爱丽丝是完全相容，还是部分相容，亦或两者都不是？请试着通过去掉最少数量的边（0 条、1 条或者双方都舍弃点儿偏好），找出一个双方相容的偏好排序。

(2) 从企业家的角度，你能否替咨询公司设计一个算法，通过舍弃尽可能少的偏好，帮助那些陷入婚姻困境的夫妇？



5.3　概不找零



你有没有注意到，如果给十几岁的小孩 50 美元，让他买一样 20 美元的东西，一般这 50 美元就有去无回了？对他们来说，总是有些东西如此重要，不得不买。

在这道题里，我们给孩子们提供了一个没有找零的绝佳借口。艺人克劳德（Claude）同时也是个街头小贩，他卖的是 100 美元以下的精美手工制品，但是他从来不给找零。

你手上没有现金，但是有 3 张支票可以开给克劳德，它们都得是整数金额的。买东西时，十几岁的孩子将利用这几张支票，给出的金额比物品价格高出的额度要尽量小。例如，你给孩子 3 张金额分别为 50 美元、30 美元和 20 美元的支票，要买的东西要价 53 美元，于是你的孩子会给克劳德 50 美元和 20 美元的支票，减掉商品的价格 53 美元，克劳德可以留下 17 美元的找零。

你真的很喜欢克劳德的手工制品，但同时你也很不满他那副“找零也归我”的态度。因此，你想使被他留下的找零金额最小。

热身问题

如果你知道要买的东西有如下几种可能的价格：20 美元、 40 美元、 50 美元或 60 美元。那么为了使克劳德没有任何找零可留，你会开哪 3 种面额的支票呢？

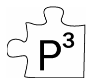
热身问题解答

有很多解决方案，例如，可以开具 20 美元、40 美元和 50 美元三种面额的支票。如此一来，克劳德就没有任何找零可留了。

---

(1) 如果你事先不知道商品的价格，只知道价格是介于 1 到 100 的整数（包括 1 和 100），那么为了使克劳德能扣下的找零最少，你要如何开具 3 张支票呢？

(2) 假设克劳德要在广告上公布 4 件商品的价格，它们都是整数，而且你也能看到这个广告。那么他要如何定价，才能保证无论你怎么设计支票的金额，也至少存在一件商品能让他留下一定数额的找零？



5.4　寂静深海

在潜艇里，有时候需要极度安静，这就引出了一系列严格的程序。潜艇船长解释道："我们的一个演习，就是要求在潜艇中无线电静默[1]时，还能在 5 个关键的部门之间交换信息。当然了，我们不能告诉你具体是哪 5 个部门。"

"每个部门都有 5 名船员。我们的基本协议如下：作为船长，我可以通过向所有部门广播的形式要求他们反馈特定的信息；每个部门均回应一个数字，并且只发送给船长（不能用广播）；然后船长可以广播一个数字，以此类推。请记住，除了船长，没有人能以广播的形式发送信息。

"为了演示，这些部门现在将会跟我交换尽可能少的消息，以便我来确定一些信息。当然，我们不能告诉你这些信息的具体性质，但是我的大副想出来一个'净化'后的版本。"

热身问题

假设船长广播请求获得这些部门中所有船员血压的算术平均值（"血压"，严格来讲，是指收缩压，是船长关心的一个 3 位数的数据）。每个部门要如何回应才能使得船长可以计算出平均值呢？

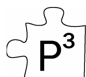
热身问题解答

每个部门都各自计算出该部门船员的血压平均值，报告给船长。然后船长将 5 个数字相加再除以 5。这个方法之所以可行是因为每个部门的船员人数刚好相等（否则，船长在计算总平均值时就要赋予每个部门的平均值不同的权重）。

热身问题是相当简单的。但事实上，相比平均数，他们更关心的是中位数。（因为平均数对异常值过于敏感。）不过，倒也不是要知道正中位置的那个中位数，只要是 25 个值中位于中间的 10 个值之一即可。

(1) 假设血压是 3 位数，那么如果每个部门都只回应一个 3 位数，船长有没有可能推测出一个血压值，它一定是所有血压值中位于中间的 10 个值之一？

(2) 船长想要找到两个血压值，其中一个保证小于或等于中位数，另外一个保证大于或等于中位数。其他的假设如第 1 题，在每个部门报告一个 3 位数之后，船长有没有可能找到这样的血压值？



① 英文为 radio silence，指在规定的时间和地区内禁止无线电发信，是隐蔽军队行动企图的一种措施。——译者注

第 6 章

前 5 章难题解答

6.1 甜食爱好者

1. 在新规则下，杰里米怎样做得到的蛋糕才能最多？他最多能得到多少？

用分数 f 和 1-f 来表示第一块蛋糕被杰里米切分后两部分的大小，其中 $f \geqslant 1/2$。如果第一次玛丽先选，另外两块蛋糕的分法就可以套用热身问题的分析，杰里米可以得到另外两块蛋糕的 5/4。如果第一次玛丽后选，则杰里米能得到大小为 f 的那份，而另外两块蛋糕，杰里米都会均分。因此，对于杰里米来说，最好的分蛋糕的方法是使 f+1/2+1/2=(1−f)+5/4。也就是，f+1=9/4 − f, 2f=5/4，即 f=5/8。因此杰里米会得到全部蛋糕的 13/8，而玛丽会得到 11/8。

2. 假设有 7 块蛋糕，玛丽有 6 次先选蛋糕的机会，谁更有优势？优势有多大？

可以用归纳法来分析。假设有 k 块蛋糕，玛丽有 k−1 次先选蛋糕的机会，这种情况下杰里米有 A 块蛋糕的优势（也就是说，杰里米可以比玛丽多得到这 k 块蛋糕中的 A 块），那么在有 k +1 块蛋糕的情况下，杰里米依然占据优势。原因如下。已知如果第一块蛋糕玛丽先选，杰里米就有 A 块蛋糕的优势。于是，杰里米只需将第一块蛋糕按 1/2+A/4 和 1/2−A/4 的比例切分。如果玛丽选了份额是 1/2+A /4 的那块，虽然杰里米将比玛丽少获得 A /2 的蛋糕，但是对于剩下的 k 块蛋糕，杰里米有 A 块蛋糕的优势，因此，杰里米最终还是有 A /2 块蛋糕的优势。相比之下，如果第一块蛋糕玛丽后选，对于剩下的 k 块蛋糕，杰里米都会采取均分的切法。这样，杰里米还是有 A /2 块蛋糕的优势。因此，有两块蛋糕时，杰里米比玛丽多得到 1/2 块蛋糕；有 3 块蛋糕时，多得到 1/4 块蛋糕；有 4 块蛋糕时多得 1/8……以此类推，7 块蛋糕时，杰里米具有 1/64 块蛋糕的优势。

3. 假设总是让杰里米来切蛋糕，有没有办法可以确保两个小孩能得到一样多的蛋糕？

有办法，只要每次都让玛丽先选，杰里米就不得不每次都均分蛋糕。

6.2　拜占庭赌徒

1. 假设现在只有 3 位顾问，而且只有一个人会一直说实话。你还是可以玩 3 局，每一局都采用等额投注。赌局开始时，你有 100 美元，你能确保赢多少钱呢？

如果第一局有两位顾问给你的建议相同，那么就押 x 美元在他们说的数字上。第一局你若输了，就说明另外一位顾问肯定是诚实的，此后的两局，你就可以听从他的建议，每局都押上所有的钱。这样的话，你最终会有 $4\times(100-x)$美元。如果第一局你听从了建议相同的那两个顾问并且赢了，那么就要忽视第三个顾问的建议，这一局后你会拥有 $100+x$ 美元。在下一局，如果这两个顾问的建议还是相同的，那么押上所有的钱，继续相信他们，因为他们俩之中有一个肯定是一直说实话的。如果他们的建议不同，那这局先不要下注，等这局结束后你就能知道这两个顾问中哪个是说实话的。接着在最后一局，你就听从说实话那个顾问的建议，这样，你最终至少能拥有 $2\times(100+x)$美元。

使 $4\times(100-x)=2\times(100+x)$，也就是 $6x=200$，得 $x=100/3$。当顾问们的建议是二对一时，将 x 的值代入两边的等式即对应了上面讨论的两种情况。也就是说，你最后能得到起始资金的 8/3，总共是 266.66 美元。

2. 4 轮赌局，4 位顾问，其中 3 位可以随意说谎，另一位 4 次中必须至少有 3 次说实话，在这种情况下，你能保证赢多少？

不幸的是，在这种情况下，你什么都保证不了。因为你的“顾问”们可以安排赌局的结果，使你根本就不知道到底该如何选择。分别用 A、B、C 和 D 来代表这 4 个顾问。

第一局：A 和 B 说是 0，C 和 D 说是 1。

结果：纸上的数字是 1，所以 A 和 B 各说了一次谎。

第二局：A 和 C 说是 0，B 和 D 说是 1。

结果：纸上的数字是 1，所以 A 已经说两次谎了，A 肯定是“可以随意说谎”的顾问之一。B 和 C 各说过一次谎。D 还没有说过谎。

第三局：B 和 D 说是 0，A 和 C 说是 1。

结果：纸上的数字是 1，所以可以肯定 B 也是可以随意说谎的。C 和 D 各说过一次谎。

第四局：A 和 C 说是 0，B 和 D 说是 1。

请注意，在第二局，如果你押的数字是 1，但结果却是 0（因为顾问们已经把纸上的数字改了），这样你会推断出，B 肯定是个“可以随意说谎”的顾问，A 和 D 各说过一次谎，C 还没说过谎。这个结论和实际情况是完全对称的，只不过是置换了顾问的代号而已。因此，如果顾问们把纸上的数字改成了 0，你将无法从这一轮中获得更多有效的信息。类似地，如果在第三局中，纸上的数字是 0，那么在第四局中 D 和 B 都有可能是那个“不总说实话”的顾问。因此，你总是无法从各局里得知哪个是你该信任的顾问。顾问们在你下完注之后再相应地更改数字，使你每一

局都输掉赌注。

3. 如果你可以参加 5 局，“不总说实话”的顾问 5 次中必须有 4 次说实话，另外 3 位顾问可以随意说谎，在这种情况下，你能保证最后至少还有 150 美元吗？

即使是 5 局，顾问们依然可以让你赢不了多少。他们的策略一开始跟 4 局时的策略相似。

第一局： A 和 B 说是 0，C 和 D 说是 1。

结果： 纸上的数字是 1，A 和 B 说了一次谎。

第二局： A 和 C 说是 0，B 和 D 说是 1。

结果： 纸上的数字是 1，A 已经说过两次谎了，A 肯定是“可以随意说谎”的顾问之一。B 和 C 各说过一次谎。D 还没有说过谎。

第三局： B 和 C 说是 0，A 和 D 说是 1。

现在我们来分情况讨论。

第一种情况　假设第三局你不下注。如果纸上的数字是 1，那么你可以推断出 D 是“不总说实话”的顾问，因为其余的顾问都已经说过两次谎了。然而，D 还有可能说一次谎。如果在第四局，D 的建议是 1，那么押 x 美元在 1 上，如果 $x<50$ 并且 D 在第四局中说的是实话，那么第五局 D 就可以说谎，你就无法下注。如果 $x\geqslant 50$，那么如果 D 在第四局中说谎，就算你第五局赢了，也无法恢复到你的起始资金了。因此，如果第三局不下注，你是没办法得到 150 美元的。

第二种情况　假设第三局你押点钱在 0 上。这样，你的处境就跟第一种情况一样，而且只会更糟。

第三种情况　假设第三局你押 x 美元在 1 上。我们先考虑 $x<12.50$ 美元的情况。假设纸上的数字确实是 1，并且你在第四局听从了 D 的建议押上了 y 美元且 $x+y<50$。那么，假如第四局你赢了，第五局你就不能下注（那时 D 可以说谎）。反之，如果 $x+y>50$，则 $y>37.50$ 美元，那么假如第四局你输了，你的钱将少于 75 美元，就算赢了第五局也得不到 150 美元。综上所述，只有 $x\geqslant 12.50$，才有可能得到 150 美元。

假设第三局你押 x 美元在 1 上，但是纸上的数字是 0。那么你的余额是 $100-x$，并且你推断出 B、C 和 D 已经都说过了一次谎。在第四局，B、C 和 D 给出的建议必然是二对一。你赌 z 美元押在两个顾问说的数字上。那么可以得出 $x+z\leqslant 25$；否则，如果第三局和第四局都输了，你的钱将不到 75 美元，那么在第五局中你不可能拥有 150 美元了。但这意味着 $z\leqslant 12.50$ 美元，如果第四局你赢了，那时你最多也就有 100 美元，并且 D 在第五局还可以说谎。假设第四局你押在一个顾问建议的数字上，其实另外两个顾问倒有可能说的是实话，这样一来，还是有两个顾问只说了一次谎。

因此，你无法保证最后还有 150 美元。如果更深入地分析，事实上可以推出甚至都不能保证最后还有 134 美元。伊万・热赞卡（Ivan Rezanka）推导出的结论是可以保证赢 133.33 美元，但是此题目前还没有任何简洁优美的证明。

6.3　“碰碰”运气

1. 鲍勃、卡罗尔（Carol）和爱丽丝 3 个人玩。爱丽丝有 51 点，鲍勃和卡罗尔都只有 50 点。按照鲍勃、卡罗尔、爱丽丝这个顺序依次下注。鲍勃和卡罗尔结成联盟，他们俩无论谁赢了都会和另一个分享奖赏。如果只剩下一轮，鲍勃和卡罗尔要如何下注才能使他们当中至少一个人获胜的概率最大？

鲍勃押 50 点赌硬币是正面，卡罗尔押 50 点赌硬币是反面。如果爱丽丝的赌注少于 50 点，那么就算她猜对了，她也不可能获胜。因为她将有 100 点，而鲍勃和卡罗尔中总归有一个人也会有 100 点。如果爱丽丝押 50 点或更多赌硬币是正面，那么如果确实是正面，爱丽丝将获胜，否则，卡罗尔获胜。因此，鲍勃和卡罗尔能确保获胜的概率是 1/2。

2. 如果爱丽丝必须第一个下注，还能得出上题的结论吗？

如果爱丽丝的赌注是 48 点或者更少，那么鲍勃和爱丽丝同上题一样下注，他们当中至少有一个会获胜。但是如果爱丽丝的赌注不少于 50 点，那么鲍勃和爱丽丝的胜算也没办法超越上题。结论还是一样。

3. 鲍勃和爱丽丝两个人玩，鲍勃有 51 点，爱丽丝有 50 点，还有两轮。倒数第二轮鲍勃先下注，最后一轮爱丽丝先下注。两轮之后，鲍勃获胜的概率大于 1/2 吗？如果大于 1/2，具体大多少？

鲍勃获胜的概率是 3/4。在倒数第二轮，他不下注，不管爱丽丝押多少点，最后她都不可能超过 100 点。如果爱丽丝输掉了倒数第二轮，由于最后一轮她必须先下注，鲍勃只要追随爱丽丝下同样的注就绝对可以获胜。如果爱丽丝赢了倒数第二轮，那么在最后一轮中，鲍勃和爱丽丝押得相反，并且押上他所有的赌注（如果爱丽丝最后一轮不下注，鲍勃可以把所有赌注都押在正面）。如此一来，鲍勃获胜的概率便是 3/4。

4. 鲍勃有 51 点，爱丽丝有 50 点，还有两轮。但这一次，倒数第二轮爱丽丝先下注，最后一轮鲍勃先下注。两轮之后，鲍勃获胜的概率大于 1/2 吗？如果大于 1/2，具体大多少？

假设在倒数第二轮，爱丽丝押 2 点赌硬币是正面。如果鲍勃不下注，或者押硬币是反面，而硬币其实是正面的话，那么爱丽丝接下来只要采用热身问题 1 里的策略就可以稳赢。如果鲍勃押上所有的 51 点赌硬币是正面，并且结果是反面，那么爱丽丝在最后一轮还是可以稳赢。如果鲍勃押上所有赌注赌硬币是正面，且确实是正面，那么鲍勃最多会有 102 点，爱丽丝有 52 点。这种情况下，在最后一轮，爱丽丝只要跟鲍勃押得相反，并且押上她所有的点，这样无论鲍勃的赌注是多少，她都有 1/2 的概率获胜。因此，爱丽丝获胜的概率至少有 1/2，如果鲍勃玩得差一点的话，爱丽丝的获胜概率会更高。对于鲍勃来说，较好的做法是，在倒数第二轮里追随爱丽丝，下同样的注押在同一面上（即若爱丽丝押 2 点赌硬币是正面，则鲍勃也押 2 点在正面上），在最后一轮里不下注，如此一来他的获胜概率还有 1/2。

5. 鲍勃有 51 点，爱丽丝有 50 点，还有两轮。倒数第二轮爱丽丝先下注，最后一轮鲍勃先下注。这一次，鲍勃事先声明倒数第二轮他的赌注将是 20 点，但是他会等到爱丽丝下完注后再决

定押在哪一面。爱丽丝获胜的概率能大于 1/2 吗？

可以。倒数第二轮，爱丽丝不下注。如果鲍勃输了，爱丽丝接下来只要采用热身问题 2 里的策略就能稳赢；如果鲍勃赢了，在最后一轮，爱丽丝跟鲍勃押得相反，并且押上她所有的点。采用此策略，她获胜的概率是 3/4。

6. 鲍勃、爱丽丝、里诺（Rino）和朱莉安娜（Juliana）4 个人玩，他们每人都有 100 点，还有两轮。每个人都竭尽全力想赢，因此不再有任何形式的联盟。倒数第二轮，鲍勃和爱丽丝押 100 点赌正面，里诺押 100 点赌反面。现在轮到朱莉安娜下注，她知道下一轮她将是第一个下注的人。那么，如果她这一轮押 90 点（不管是押正面还是反面），她赢的概率是多少？她应该押正面还是反面呢？

如果朱莉安娜押 90 点，那她不可能获胜。假如她赌硬币是正面，并且硬币确实是正面，那么鲍勃和爱丽丝各有 200 点，朱莉安娜有 190 点[①]。假如最后一轮，她押 x 点赌硬币是正面，她明白以下两点：(i) 鲍勃和爱丽丝这一轮肯定会下不同的注（因为打成平手对他们没有任何好处）；(ii) 鲍勃和爱丽丝中有一个人可以押不少于 x 点赌正面。因此，她根本没有获胜的机会。如果朱莉安娜押 90 点赌硬币是反面，并且硬币确实是反面，那么在最后一轮，她也无法赢过里诺。

因此，在倒数第二轮时，朱莉安娜应该押 100 点赌硬币是反面。如果硬币是反面，那么下一轮她和里诺都有 1/2 的机会获胜。里诺不会跟朱莉安娜下一样的赌注，因为他知道平手对他没有好处。综上所述，朱莉安娜可以有 1/4 的概率获胜，但是她必须下很大的注。

约翰·特罗诺（John Trono）和汤姆·罗基奇（Tom Rokicki）一如既往地对这道题的解法提供了很多有用的见解。

注意　迄今为止，围绕这道题的所有提问都是用纸和笔就能解决的简单的问题。但在现实中，这个游戏往往有更多的玩家，每个玩家都有不同的起始资金，可以进行多轮的赌局，这种情况下的游戏策略现在还是难以捉摸的。我认为，能够作出解答的人，不单得是博弈论专家，还要精通算法。

---

① 原文为 180，有误。——译者注

6.4　信息增益

1. 乔丹有没有可能设计出一套协议，使得他的 5 个朋友都能猜对他们帽子上的数字？如果可以，请解释一下。如果不行，乔丹获胜的概率高吗？

乔丹他们一定能赢。依据之前的协议，这次 5 个朋友约定如下：如果阿里安娜收到蓝票，则代表 0，若收到红票，则代表 5；鲍勃收到蓝票代表 1，收到红票代表 6；卡罗琳收到蓝票代表 2，收到红票代表 7；大卫收到蓝票代表 3，收到红票代表 8；埃伦收到蓝票代表 4，收到红票代表 9。

乔丹把所有帽子上的数字都加起来，然后除以 10 取余数。例如，假如 5 个数字是 3、2、7、9 和 5。乔丹算出总和为 26，除以 10 的余数是 6。

随后，他根据余数选择票发给对应的人。在这个例子里，他将交给鲍勃一张红票，代表 6。

现在，他的朋友们只要把其他人帽子上的数字都加起来，再综合余数，就能推导出自己帽子上的数字，而且答案是唯一的。

在这个例子中，卡罗琳帽子上的数字将是 7。因为她看到其他人帽子上的数字是 3、2、9 和 5。4 个数字的总和是 19，而且她知道 5 个数字的总和除以 10 的余数将是 6，因而她能得到的唯一解将是 7。

6.5　直冲云霄！

1. 这个奖金为 100 万美元的“直冲云霄”游戏有 3 次“捕获”机会，有没有好的策略呢？如果有的话，你的获胜概率是多少呢？

沿用“苏丹的女儿”那道题的思路，我们将使用 3 个递增的数字 $n1$、$n2$ 和 $n3$ 来阐述应对策略。策略如下：首先放弃前 $n1$ 个球里的值，然后捕获之后出现的第一个比前 $n1$ 个值都大的那个球，记第一个捕获的球的编号为 $b1$（$b1>n1$）。

如果 $b1>n2$，那么捕获之后出现的第一个比前 $b1$ 个值都大的那个。如果 $b1\leqslant n2$，则忽略 $b1$ 至 $n2$ 之间的所有球，然后捕获之后出现的第一个比前 $n2$ 个值都大的那个，记第二个捕获的球的编号为 $b2$。

如果 $b2>n3$，那么捕获之后出现的第一个比前 $b2$ 个值都大的那个。如果 $b2\leqslant n3$，则忽略 $b2$ 至 $n3$ 之间的所有球，然后捕获之后出现的第一个比前 $n3$ 个值都大的那个，记第三个捕获的球的编号为 $b3$。

显然，如果最大的那个值在前 $n1$ 个球里，那么按照这个策略你接下去捕获不到任何值，而且，使用捕获也没有任何意义。这说明，我们要使 $n1$ 尽可能小才有用。

题中一共有 100 个球，3 次捕获机会，如果设置 $n1$、$n2$ 和 $n3$ 依次为 14、32 和 64，那么获胜的概率大约是 68%。

对于你的对手写下的数字，我们将用它在 100 个数中的排位顺序来代替。也就是说，最大的数用 99 代替，最小的数用 0 代替。考虑按如下序列出球。

```
78 3 80 90 25 95 51 27 57 40 65 48 55 72 26 73 54 31 15 2 89 61 97 98 8
50 38 18 88 52 4 42 68 16 62 9 94 99 20 28 56 58 76 93 10 96 63 35 81 91
66 11 30 5 0 24 82 29 41 12 47 71 44 92 43 32 85 84 7 59 60 86 69 21 83
79 64 67 74 37 1 46 22 19 33 39 87 45 36 13 23 75 34 70 53 49 77 17 6 14
```

前 14 个数中最大的数为 95，97（第 23 个数）是之后出现的第一个大于 95 的数，因此 b1 为 23。按照策略，第二次捕获的是第 38 个数 99。第三次捕获也就无关紧要了。

结论：还是值得赌一把的。

这道题可能跟“苏丹的女儿”那道题一样，也能通过简洁优美的分析得出结论，但因为这道题非常适合编程解决，我们没有理由不让计算机代劳。可以将上述策略编程：选择升序排列的 3 个数，对每一个三元组，随机生成 10 000 组 0 到 99（用排位顺序代替实际数值）的排列，从而计算出每个三元组的获胜概率。当然，该策略也可以推广，不只局限于三元组。

2. 如果有 1000 个乐透球，答案会如何变化？

如果是 1000 个球，3 次捕获机会，设定 $n1$、$n2$ 和 $n3$ 分别为 141、317 和 650，则获胜的概率大约是 66%。所以你还是应该赌上一把的。获胜概率依然如此之高，真是出乎意料！

6.6　政治分肥

1. 可能会形成哪些联盟？

A 区和 C 区可能会形成一个联盟。C 区会更倾向于跟 A 区结盟，因为只有跟 A 区结盟，C 区才能获得最多的拨款。同样，A 区也更倾向于跟 C 区结盟。

2. 为了得到尽可能多的钱，B 区应该怎么规定这个百分比（51%、67%还是 75%）？

67%这个百分比对 B 区来说是最好的。这样 B 区可以跟 A、E 两区结盟，并且 B 区能得到拨款的 25/70。这样的结盟方式使 A 区得到的拨款额度也更多。如果把百分比定为 75%，那么 A 区就可能和 C、D、E 区结盟，这样 B 区一分钱都得不到。

6.7 社会博弈

1. 如果想使双方都欺诈经营不再是纳什均衡，应该怎么更改惩罚机制？

如果将惩罚带来的利润损失增加到 9 份，那么爱丽丝在右上角单元格的利润是$(4\times0.9)+((-9)\times0.1)$。在右下角单元格的预期利润则是 0。从而得出如下矩阵。

	爱丽丝 诚信	爱丽丝 欺诈
鲍勃 诚信	3，3	0，2.7
鲍勃 欺诈	2.7，0	0，0

在这种情况下，如果爱丽丝欺诈经营，则鲍勃无论是否欺诈经营，他的收益都是 0。所以，从鲍勃的角度来讲，右下角和右上角的情况是一样的。但是，如果鲍勃决定诚信经营的话，博弈的状态会从右上角转移到左上角单元格（双方都诚信经营）。为了鼓励这个格局，最好可以将惩罚的损失定到比 9 份更多一点儿，例如 9.01 份。

2. 假设你负责制定公共政策，想将对欺诈经营的惩罚限制在 5 份利润之内，那么如果只想维持左上角单元格为纳什均衡，你应该将抓住犯罪行为的几率提高到多少？

假设惩罚的损失降低到 5 份，被抓到受惩罚的几率提高到 17%，那么爱丽丝如果欺诈经营，在右下角的情况下，她的预期收益是$(0.83\times1)+(0.17\times(-5))=-0.02$ 份；在右上角的情况下，她的预期收益是$(0.83\times4)+(0.17\times(-5))=2.47$ 份。

	爱丽丝 诚信	爱丽丝 欺诈
鲍勃 诚信	3，3	0，2.47
鲍勃 违法	2.47，0	−0.02，−0.02

因此，左上角是唯一的纳什均衡点。

3. 假设欺诈经营被抓到的几率是 10%，能不能找到合适的惩罚值使得右上角单元格（爱丽丝违法经营，鲍勃诚信经营）成为唯一的纳什均衡点？

在违法经营被抓到的几率是 10%的前提下，假设惩罚值为−9.01，那么在右下角的情况下，有效值是$(-9.01\times0.1)+(1\times0.9)=-0.001$ 份；在右上角的情况下，爱丽丝的有效值是$(-9.01\times0.1)+(4\times0.9)=2.699$ 份，我们近似记为 2.7。

计算得到博弈矩阵如下。

	爱丽丝 诚信	爱丽丝 违法
鲍勃 诚信	5，2	0，2.7
鲍勃 违法	2.7，0	−0.001，−0.001

因此，爱丽丝会维持右上角单元格的状态。鲍勃大可以指责爱丽丝道德败坏，但在爱丽丝眼中，这只是一场博弈。

4. 仍然假设欺诈经营被抓到的几率是 10%，要想使爱丽丝一直诚信守法，要怎么设计惩罚机制？

首先回顾一下此问对应的博弈矩阵：

	爱丽丝 诚信	爱丽丝 违法
鲍勃 诚信	5，2	0，4
鲍勃 违法	4，0	1，0

如果我们将惩罚带来的损失提升至 17 份（这可以说是非常严厉的惩罚，就好像把偷面包的小偷砍掉一只手），重新计算博弈矩阵如下。

	爱丽丝 诚信	爱丽丝 违法
鲍勃 诚信	5，2	0，1.9
鲍勃 违法	1.9，0	−0.8，−0.8

在这个博弈矩阵中，左上角单元格是唯一的纳什均衡点。

6.8 猫鼠游戏

1. 警方只想在 5 个十字路口控制小偷的行驶方向，他们也知道小偷是迫不及待地想要逃脱。那么小偷最多过多久（以网格计）便可以到达北边界或南边界？

图 14 展示了城市北面的大部分网格。南面和北面的情况是完全对称的。警方用虚线箭头表示，小偷则用实线箭头表示。小偷（T）最快是在行驶过 22 个网格（简称为“步”）之后便可逃脱。对警方（P）来说，这是最优的策略，因为每次 P 强迫 T 向南行驶一步后，T 最多需要两步（一步向东或向西，一步向北）便可弥补回来。小偷逃脱所需要的最少步数计算如下：即使没有警方干预，小偷也需要 9 步才能逃脱。而在警方的 5 次干预中，一次迫使小偷向东或向西行驶，还有 4 次迫使小偷向南行驶，而针对这 4 次干预，小偷每次都相应需要 2 步才能弥补。因此加起来，他总共需要 $9+1+(4\times3)=22$ 步才能逃脱。

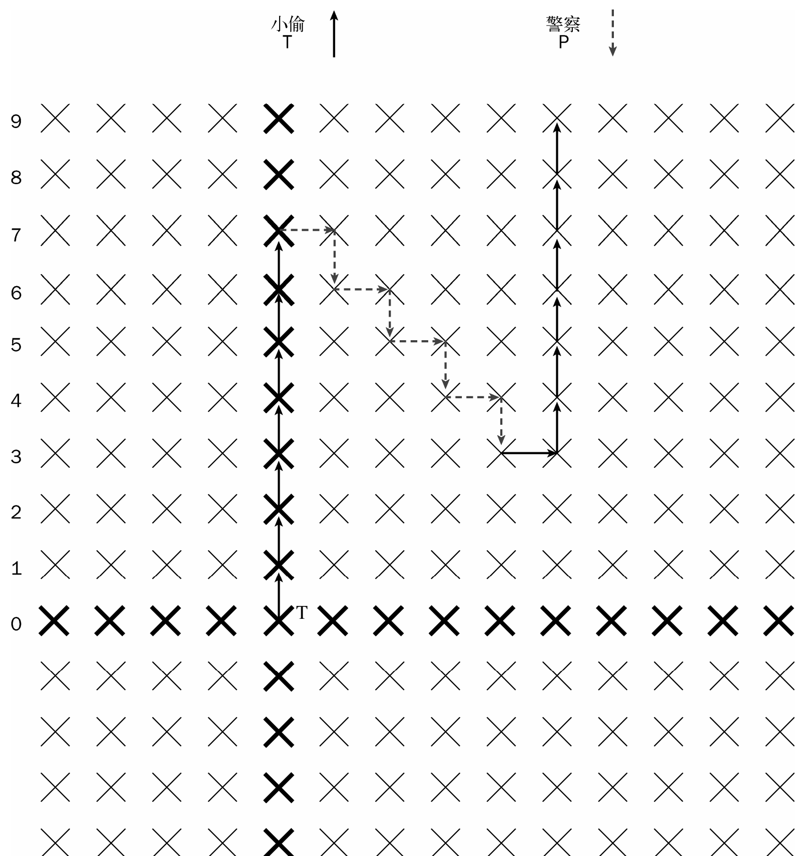


图 14　小偷想从城市的北边界逃脱。警方用虚线箭头一表示，小偷则用实线箭头表示。小偷将在行驶过 22 个网格后逃脱

2. 假设警方不想让小偷到达北边界或南边界，因此他们的计划是，每 n 个十字路口中选 m 个（$m<n$）控制小偷的前进方向。如果他们既要防止小偷逃脱，又想对小偷的行驶路线施加最少的干预（m/n 最小），m 和 n 的值应该是多少？

警方可采用和上一题类似的策略。可以先让小偷向北行驶 8 步，在小偷离北边界还有一步之遥时，迫使他向东（或西）行驶，然后迫使他向南行驶，如上图所示。之后，小偷会选择向东（或西）行驶，然后警方再迫使他继续向南行驶。警方最终迫使小偷一路驶回第一行，最后车头向着南边界。这整个过程中，警方总共需干预 8 次，小偷可以自行行驶 15 步。因此警方的干预频率是每 23 步干预 8 次。

3. 如果小偷只要到达任何一个边界（包括东边界和西边界），就可以逃脱，那么 m 和 n 的值又应该是多少？

如果警方将干预频率控制在每 4 步干预 2 次，就可以将小偷的活动范围限定在城市中心的 6×6 的网格内。例如，每次当小偷先向东再向北行驶后，警方便迫使小偷向西再向南行驶。如果小偷沿着一个方向行驶，那么警方按照 2/4 的干预频率完全可以将他的活动范围限定在城市中心的 6×6 网格内。这个策略虽然不够巧妙，但绝对可行。目前我没有发现其他更好的通用解法，但是或许聪明的你能找到一个。如果你找到了一个更巧妙的解法，请务必让我知道。

上述解法都是由伊万·热赞卡给出的。

6.9 流感中的数学

1. 如果卫生部门强制要求一定比例的人口接种疫苗，那么为了使流感爆发时的平均死亡率最低，应该如何规定这个比例？

以 f 表示接种疫苗的人口比例，那么死亡率的表达式即是：$5f+10(1-f)(1-f)=5f+10f^2-20f+10$。也就是说，死亡率为 $10f^2-15f+10$。对这个表达式求最小值，得出 $20f=15$，即 $f=0.75$。当接种人口比例是 75%时，死亡率是$(5\times0.75)+(2.5\times0.25)=4.375\%$。请注意，当接种比例如此之高时，没有接种疫苗的人只有 2.5%的死亡几率，而那些接种了疫苗的人却有 5%的死亡几率。

2. 在上述前提条件下（没有强迫接种，信任卫生部门的风险统计数据，利己思维），百分之多少的人口会接种疫苗？

正好一半（考虑到“不作为偏见”，实际可能会略小于一半）。理由如下。以第 i 个人为例，如果已经有半数的人口接种了疫苗，那么他就不可能接种疫苗。因为对第 i 个人来说，如果接种疫苗，死亡几率为 5%；如果不接种疫苗，死亡的几率也只有 5%，还有可能更小。如果已经接种的人口少于半数，并且剩下的人刚刚足以使接种人数达到半数，那么第 i 个人自然会选择接种疫苗，因为比起不接种疫苗，他接种疫苗的存活概率会更大些，我们称之为“必须接种”点。

3. 假设有 25%的人是无论如何都不会接种疫苗的，但是接种之前谁也不知道具体是哪些人。那么在和上题同样的前提条件下，百分之多少的人口会接种疫苗？

在这种情况下，最多有 50%的人会接种疫苗。一旦已接种的人口达到半数，就不会再有人（不论是决意不接种疫苗的还是正常的市民）愿意接种疫苗。如果已接种的人口还未到半数，我们便是在“必须接种”点上，此时一个正常的市民会选择接种，而那些决意不接种疫苗的人还是会拒绝接种。

4. 同样，卫生部门不会强迫任何人接种疫苗，那么为了使自愿接种疫苗的人口百分比同第 1 题，卫生部门应该将流感的致死率夸大为多少？

卫生部门要使自愿接种疫苗的人口百分比为 75%。也就是说，当接种人口为 75%时，没有接种疫苗的人和接种的人的死亡几率相同。我们用 R 表示流感的初始致死率，即要使 $R(1-f)=R\times0.25=5\%$，得出 $R=20\%$。因此，如果每个人都相信，在没有接种疫苗的情况下，染上流感后的死亡率为 20%，那么将有 75%的人口会选择接种疫苗。

6.10　冰上历险

1. 图 4 中用黑点标记了两根木棍，要绕过障碍物从底端穿过长廊，印第安纳还需要更多的木棍吗？

印第安纳需要绕过第一根木棍两次，作两次旋转，如图 15 所示。

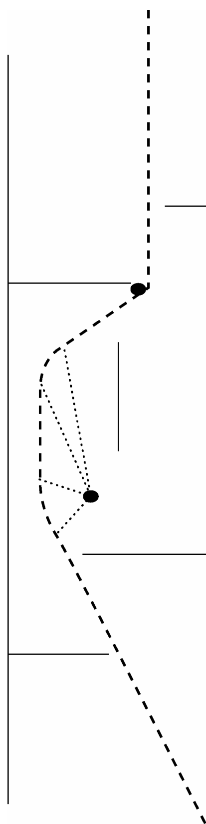


图 15　印第安纳利用第一根木棍使滑行方向平行于长廊的墙面，然后再以特定角度绕过障碍物

2. 冰面上有一些物品（如图 5 所示，以 X 标记）和 L 形的障碍物，印第安纳参加了一个“滑冰夺宝”游戏。为了拿到这些物品，印第安纳最少需要多少木棍，分别放置在哪里？

4 根木棍就足够了。图 16 展示了一种简单的解法。请注意，同一根木棍可以被多次使用。

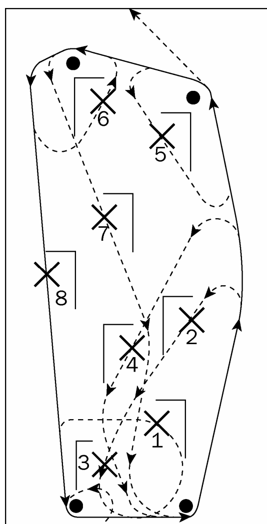


图 16　为了赢得“滑冰夺宝”，从底部开始，印第安纳滑行路线如图所示。数字标识了印第安纳收集物品（X）的顺序。请注意，印第安纳首先利用左下角的那根木棍作了一次急转弯，然后再次利用这根木棍调整路线以取得 X1。随后他利用左下角和右下角的木棍各两次以绕到 X2 和 X3 处

最棘手的部分是在 X4 附近（如图 17 所示）。

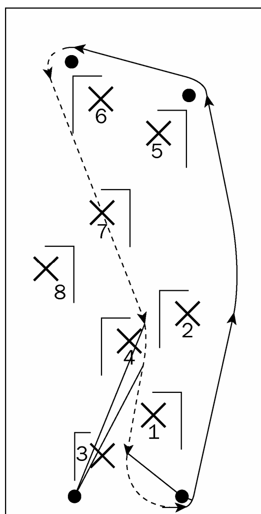


图 17　此解法的难点在于，当印第安纳从 X2 附近滑行到 X4 时，他要缠住一根有一定距离的木棍做旋转以改变滑行方向

上述解法都是由 TJ・塔凯（TJ Takei）提供的。

6.11 最佳术语

1. 假设除了热身问题中给出的频率外，你还知道在每条消息中，B 字符后面总跟着 A 字符，D 字符后面总跟着 C 字符。是否可以设计一种编码方案使得该消息所需的比特数更少？

这种情况下，我们可以按如下形式编码。

```
A—1
BA—01
C—000
DC—001
```

字符 A 出现 15 次，需要 15 个比特；字符串 BA 出现 15 次，需要 30 个比特；字符串 DC 出现 5 次，需要 15 个比特；字符 C 出现 5 次，需要 15 个比特。

因此，消息的总长度只要 75 比特。

2. 假设除了热身问题中给出的频率外，你还知道在每条消息中，D 字符后面总跟着 C 字符，C 字符后面总跟着 B 字符，B 字符后面总跟着 A 字符。是否可以设计一种编码方案使 60 个字符的消息所需的比特数再少些？哪些短语可以被精简为术语？

可采用如下的编码形式。

```
A—1
BA—01
CBA—000
DCBA—001
```

在这种情况下，字符串 DCBA 出现 5 次，需要 15 比特；字符串 CBA（不包括 DCBA 里的）出现 5 次，需要 15 比特；字符串 BA（不包括 CBA 及 DCBA 里的）出现 5 次，需要 10 比特；单独的字符 A 出现 15 次，需要 15 比特。因此，消息的总长度只为 55 比特，平均每个字符占用不到 1 个比特。短语 DCBA、CBA、BA 和 A 可以被精简为术语。

3. 假设除了热身问题中给出的频率外，你还知道在每条消息中，D 字符后面总是跟着 C，C 字符后面总是跟着 B，B 字符后面跟着 A 的概率是 13/15。为了使 60 个字符的消息占用的比特数最少，应如何设计编码方案？

我们将讨论两种编码方案。第一种编码方案将继续沿用第二问的短语，此外，还为各种例外情况添加了较长的码字。具体编码如下所示。

```
A—1
BA—01
CBA—000
DCBA—00101
DCB—00100
CB—00110
B—00111
```

对于第一种编码方案，我们来考虑以下两种情况。第一种情况：假设字符串 DCBA 出现 5 次，

占用 25 个比特；字符串 CBA（不包括 DCBA 里的）出现 5 次，占用 15 个比特；字符串 BA（不包括 DCBA 和 CBA 里的）出现至少 3 次，占用 6 个比特；字符 B 单独出现 2 次，占用 10 个比特；另外字符 A 单独出现 15 次，占用 15 个比特。第二种情况：假设字符串 CBA 一共出现 3 次，字符串 CB 单独出现 2 次，另外字符串 BA 出现 5 次，其余同上一种情况。第一种情况中，起始字符为 C 的字符串短语将占用 15 个比特，起始字符为 B 的字符串短语将占用 16 个比特；而在第二种情况中，起始字符为 C 的短语需要的比特数增加至 19，而起始字符为 B 的短语需要的比特数减少至 10。除了上述两种情况外，如果将第一种情况中字符串 DCBA 的出现次数减少 2 次，并增加 2 次字符串 DCB[①]，也能构成符合条件的消息，但这并不会增加起始字符为 D 的短语所需的比特数。因此，对于这种编码方案，最坏的情况应该是字符 B 后面不跟着 A，即字符 B 单独出现两次。这样一条消息的总长度为 25+15+6+10+15=71 比特。

而第二种编码方案则只用术语进行编码，不允许“例外”情况存在。具体编码如下所示。

```
A—1
B—01
CB—000
DCB—001
```

按照这种方案，字符串 DCB 出现 5 次将占用 15 个比特，字符串 CB（不包括 DCB 里的）出现 5 次占用 15 个比特，字符 B 单独出现 5 次占用 10 个比特，字符 A 单独出现 30 次占用 30 个比特。消息的总长度为 15+15+10+30=70 比特。因此，“例外”情况使得术语看上去没那么有吸引力。

① 原文为 CDB，有误。——译者注

6.12　巧分弹珠

1. 到了周二，卡罗尔依旧有 5 个红色弹珠、6 个蓝色弹珠和 7 个白色弹珠。但是为了让弹珠的分装更多样化，她决定这次任意两袋之间的差异至少需要两次“进出”操作才能消除。所谓“进出”是指向袋子里增加一个弹珠或者从袋子里拿出一个弹珠。例如，R 和 RR 这两个袋子的差异只需要一次“进出”操作就能消除（向 R 的袋子里增加一个 R），RW 和 RB 这两个袋子的差异需要两次“进出”操作才能消除（拿出一个 W，并增加一个 B）。如果任意两个袋子之间的差异都需要两次“进出”操作才能消除，她能把这些弹珠分成几袋呢？

一共可以装成 R、B、W、RBB、BWW、WWW、RBW 和 BRR 这 8 袋。分装的方法是数量从少到多。并且，两个弹珠装一个袋子是不可能的，因为装有两个弹珠的袋子跟装有一个弹珠的袋子只有一次“进出”的区别。

2. 她只知道袋子里有 18 个弹珠，有红、蓝、白 3 种颜色，每种颜色至少有一个弹珠。在打开袋子之前，她接到了一个电话，电话那头问她：“如果派对上有 8 个孩子，你能保证将袋子里的弹珠分成不同的 8 袋吗（比如，任意两个袋子之间至少有一次‘进出’的区别）？如果不能保证，那么能分成不同的 7 袋给 7 个孩子吗？如果可以保证，那么能分给 9 个孩子吗？”卡罗尔应该如何回答呢？

如果袋子里红色和蓝色弹珠各一个，其余 16 个弹珠都是白色的，那么对卡罗尔来说，最多也只能装成 7 个袋子：W、R、B、WW、WWW、WWWW 和 WWWWW，多出的那个白色弹珠可以跟红色或蓝色的弹珠装在一起。在这种情况下，不可能分成 8 个袋子，因为一旦只剩下白色弹珠，每个袋子之间只能靠弹珠的数量来区别。如果红色弹珠多于 1 个（或蓝色多于 1 个，或红蓝两色均多于 1 个），但还是比白色弹珠少，那么那些装有较多弹珠的袋子中的白色弹珠便可以用红色或蓝色的弹珠代替。因此，卡罗尔能肯定的是，她至少可以将这 18 个弹珠分装成 7 个袋子，但不能保证分装成更多袋子了。

3. 到了周四，卡罗尔还是只知道自己有 18 个弹珠，3 种颜色，每种颜色至少有一个弹珠。她还是像周二一样，希望孩子们能拿到不同的弹珠。所以这次她想要任意两个袋子之间至少有两次“进出”的区别。这种情况下，她能保证为几个孩子准备弹珠礼物呢？

思路同上题，如果袋子里红色和蓝色弹珠各一个，其余 16 个弹珠都是白色的，那么卡罗尔只能保证分装成 6 个袋子：W、R、B、WWW、WWWWW 和 WWWWWWW。这已经是最佳方案了，因为一旦只剩下白色弹珠，那么各个袋子之间必须相差两个弹珠。

4. 到了周五，由卡罗尔的朋友黛安娜（Diane）来分装弹珠。黛安娜保证实现以下 4 点：(i) 各袋弹珠都不相同（至少有一种颜色的弹珠数量不同）；(ii) 一共有 18 个弹珠；(iii) 白色的弹珠最多，蓝色次之，红色最少；(iv) 她最多只能分装成 7 个不同的袋子。假设黛安娜非常擅长分装弹珠，那么这 18 个弹珠里最多可以有几个红色的？

如果只有一个红色弹珠和两个蓝色弹珠，那么可以分成以下 7 袋：W、B、R、WW、BW、WWW 和 WWWW[①]。

① 原文为 W、B、RWW、BW、WWW、WWWW，有误。——译者注

还剩下 4 个白色的弹珠，不够 5 个，因此无法再单独装成一袋。如果有两个红色弹珠和 3 个蓝色弹珠，那么不需要用光所有的弹珠就可以轻易分装成 8 袋：W、B、R、WW、WB、WR、WWW 和 WBW。

如果有两个红色弹珠，5 个以上蓝色弹珠（蓝色弹珠最多可以有 7 个，因为白色弹珠要比蓝色弹珠多），我们至少可以分装成 8 袋，例如：W、B、R、WW、WB、WR、BB 和 WBW。当然符合条件的分装组合还有很多，在此不一一赘述。

类似地，如果有 3 个红色弹珠，4 个以上蓝色弹珠，至少也能分装成 8 袋，例如：W、B、R、WW、WB、WR、BB 和 WRW。

以此类推，4 个或 5 个红色弹珠也符合条件，但红色弹珠的上限是 5 个。如果有 6 个甚至更多的红色弹珠，那么至少得有 7 个蓝色弹珠，这样一来，就只能有 5 个白色弹珠了。

6.13 颜色反转

1. 骑士是否可以将棋盘每一个方格的颜色都反转奇数次？如果可以，要走多少步？

史蒂夫·谢弗（Steve Schaefer）提供了一个 25 步的解法，描述如下："以左上角的方格为原点，记为(0, 0)。以坐标为(2, 3)的方格为起点，用 20 步便可以将最外面 3 圈格子的颜色全部反转了，随后回到起点。此时，中间 4 格的颜色还没有被反转，并且起始点的颜色已经被反转了两次。因此，还有(2, 3)、(3, 3)、(3, 4)、(4, 3)和(4, 4)这 5 个方格需要被反转颜色。通过以下 5 步可以实现。"

```
(3,3),(4,3),(4,2)
(4,3),(4,4),(3,4)
(3,3),(3,2),(2,2)
(3,2),(4,2),(4,3)
(3,3),(2,3),(2,2)
```

综上所述，谢弗的 25 步解法可以表述如下，起点为(2, 3)。

```
 1: (1, 3), (0, 3), (0, 2)
 2: (0, 1), (0, 0), (1, 0)
 3: (1, 1), (1, 2), (2, 2)
 4: (2, 1), (2, 0), (3, 0)
 5: (3, 1), (3, 2), (4, 2)
 6: (4, 1), (4, 0), (5, 0)
 7: (6, 0), (7, 0), (7, 1)
 8: (6, 1), (5, 1), (5, 2)
 9: (6, 2), (7, 2), (7, 3)
10: (6, 3), (5, 3), (5, 4)
11: (6, 4), (7, 4), (7, 5)
12: (7, 6), (7, 7), (6, 7)
13: (6, 6), (6, 5), (5, 5)
14: (5, 6), (5, 7), (4, 7)
15: (4, 6), (4, 5), (3, 5)
16: (3, 6), (3, 7), (2, 7)
17: (1, 7), (0, 7), (0, 6)
18: (1, 6), (2, 6), (2, 5)
19: (1, 5), (0, 5), (0, 4)
20: (1, 4), (2, 4), (2, 3)
21: (3, 3), (4, 3), (4, 2)
22: (4, 3), (4, 4), (3, 4)
23: (3, 3), (3, 2), (2, 2)
24: (3, 2), (4, 2), (4, 3)
25: (3, 3), (2, 3), (2, 2)
```

6.14 赛程编排

1. 有没有可能编排一个 11 天的赛程，同时满足以上各条件？

这个解法是来自于迪德尼（Dudeney）一个世纪之前编写的经典谜题书。每天对阵的两个队伍用字母对表示，字母对之间用空格隔开。你将发现，除去第一列 A，其他几列都是 BEGFKHICDLJ 这个序列的各种置换（除了 A 以外，其他队伍各出现一次）。以 E 队为例说明。E 队在非 A 的各列中，均只出现一次。因此，E 队和 A 队有对阵的机会。同时可以观察到，E 队在各行（即每天）也均只出现一次（因为除去第一列，其他各列都是 BEGFKHICDLJ 的置换，它们互不相同）。

第 1 天: AB CD EF GH IJ KL
第 2 天: AE DL GK FI CB HJ
第 3 天: AG LJ FH KC DE IB
第 4 天: AF JB KI HD LG CE
第 5 天: AK BE HC IL JF DG
第 6 天: AH EG ID CJ BK LF
第 7 天: AI GF CL DB EH JK
第 8 天: AC FK DJ LE GI BH
第 9 天: AD KH LB JG FC EI
第 10 天: AL HI JE BF KD GC
第 11 天: AJ IC BG EK HL FD

那么，如何确定 E 和其他每个字母都配成过对呢？除去最左边的一列，在其余 5 列中，E 队都和两支队伍对阵过。我们必须要确保要对阵的这 10 支队伍每次都是不同的。按照以下方法列出字母对就可以确保这一点：以字母在序列 BEGFKHICDLJ 中的位置索引为依据。第一个和 A 结对的字母为 B，在序列中的索引为 0。下一对队伍 CD 的索引分别是 7 和 8，则它们索引距离为 1。

CD 的索引分别为 7 和 8，它们的索引距离为 1。
EF 的索引分别为 1 和 3，它们的索引距离为 2。
GH 的索引分别为 2 和 5，它们的索引距离为 3。
IJ 的索引分别为 6 和 10，它们的索引距离为 4。
KL 的索引分别为 4 和 9，它们的索引距离为 5。

在安排赛程时，因为不同列的字母对的索引距离各不相同，所以给定的字母对 XY 只能对应唯一的一列。举例来说，EB 的索引距离为 1，同样，EG 的索引距离也是 1。EF 和 EJ 的索引距离为 2，以此类推。这里，我们是以 E 队为例说明，对其他从 B 到 L 的各队也是同理。此外，对于 A 队，只要仔细观察第一列字母对即可找到编排规律。

6.15　生物中的分形学

1. 如果一共有 8 个节点，每个节点至多有 4 条连接，有没有可能用 16 条连接使得任意两节点间的受损距离为 2？

8 个节点只需要 16 条连接即可，如图 18 所示。

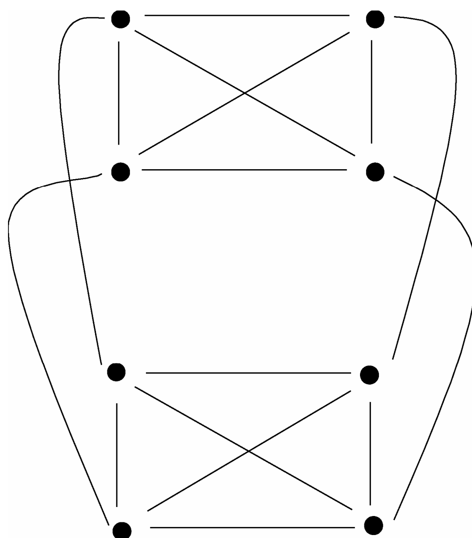


图 18　8 个节点的蛋白质网络，任意两节点间的受损距离为 2。图中的 8 个节点分成了两组，4 个节点一组。每个节点和组内的节点都直接相连，和组外的节点都存在两条通路。这两条通路的长度至多为 2，它们的区别仅在于中间点不同

2. 如果一共有 12 个节点，每个节点至多有 5 条连接，要实现任意节点间的受损距离为 2，最少需要的连接数是多少？

对于 12 个节点，可以按照 4 个节点一组分为 3 组，组内的节点两两相连（需要 $3 \times 6=18$ 条连接[①]）。组和组之间通过 4 条连接相连，3 个组一共需要 $3 \times 4=12$ 条连接。加在一起，一共需要 30 条连接。

3. 如果一共有 12 个节点，但任意节点的连接数没有限制，要实现任意节点间的受损距离为 2，最少需要的连接数是多少？

如果每个蛋白质节点的连接数没有限制，可以尝试图 19 所示的设计方法。总共只需要 21 条连接。图 19 中的蛋白质网络包含了两个星形结构，以每个 hub 节点为中心形成一个星形结构。设计成两个星形结构是为了防止有一个 hub 节点受损。

① 原文为节点，有误。——译者注

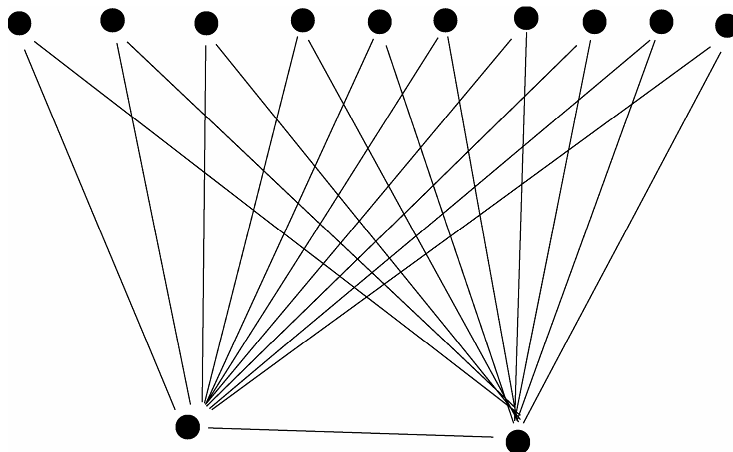


图 19　12 个节点的蛋白质网络，任意两节点间的受损距离为 2，只有 21 条连接

4. 现在来考虑一个有 108 个蛋白质节点的网络，我们还不知道蛋白质之间所有的交互连接是如何分布的。如果任一个节点最多有 60 条连接，要实现任意节点对间的受损距离为 2，这个蛋白质网络需要的最少连接数是多少？请找出一个少于 600 条连接的解决方案。

将 108 个节点分成两部分，96 个节点作为基础节点，其余 12 个节点作为交换机节点起到连接的作用。将基础节点从 1 到 96 编号，然后按 1 到 24 号、25 到 48 号、49 到 72 号、73 到 96 号分为 4 组，分别称为 A 节点组、B 节点组、C 节点组和 D 节点组。

如图 20 所示，构思该问题的一个较好方式是用四面体的 4 个超级节点（黑色实心大圈）代表 4 个基础节点组。每个节点组都发出 6 条连接和其他节点组连通。任意两节点组之间通过两个交换机节点连通。

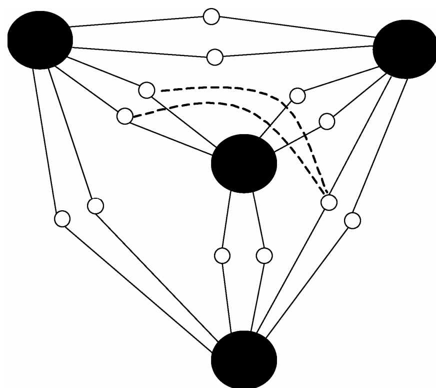


图 20　交换机节点用空心小圈表示，超级节点（每个包含 24 个基础节点）用实心大圈表示。最基本的网络设计包含 576 条连接。除此之外，我们还额外为不相邻的交换机节点之间添加了 12 条连接，图中的两条虚线边即为其中的 2 条

图 20 中，每个交换机节点通过两条边和两个超级节点连通，这表示实际上每个交换机节点都有 2×24 条边连通基础节点。因此，一共有 2×2×24×6=576 条边连通基础节点。如果两个交换机节点共享一个超级节点，则称它们“相邻”。任意两个“非相邻”的交换机节点之间都需要直接相连。对每个交换机节点来说，只存在两个不相邻的交换机节点，因此总共还需要 12×2÷2=12 条连接（每条连接都对应两个交换机节点，会被统计 2 次，因此需要除以 2）。这样总共需要 588=576+12 条连接。

此解法由 TJ · 塔凯给出。

注意 此类网路设计问题一般具有如下的形式：找出含有 N 个节点的网络的最小连接数，使得任意节点的受损距离至多为 D，其中每个节点的最大度（即每个节点的连接数）为 K，并且可能有多达 X 个受损节点。这类问题可能跟生物学极为相关。在此列举两篇我很喜欢的与此相关的生物数学论文：

“*Regulation of metabolic networks: understanding metabolic complexity in the systems biology era*”，Lee Sweetlove and Alisdair Fernie，New Phytologist 2005，168: 9-24.

“*Evolutionary capacitance as a general feature of complex gene networks*”，Aviv Bergman and Mark Siegal，Nature 2003 Jul 31; 424(6948): 549-52.

6.16　轻松分馅饼

1. 这次需要把馅饼五等分，请找出一种符合上述 3 条规则的切法，使得最终块的总周长最小。

如图 21 所示。第一刀切到总宽度 1/5 处；第二刀垂直于第一刀切到总宽度 1/4 处；第三刀垂直于第二刀切到总宽度 4/15 处；第四刀垂直于第三刀平分剩下的馅饼，即切到总宽度 3/8 处。按照这种切法，所有最终块的周长总和为 61/6，即约等于 10.17。

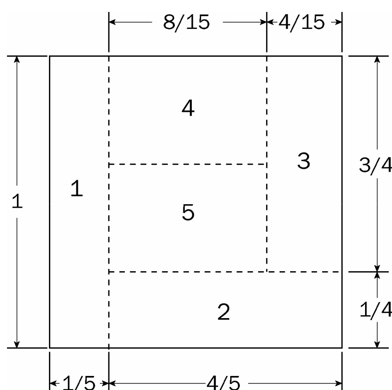


图 21　遵循儿童切割规则的纵横交替的切法

2. 在抛弃儿童切割规则后，有没有更好的方案使得五等分后的总周长更短？

最佳的五等分方案是使每一刀都平行于正方形馅饼的一条边，如图 22 所示。即分割出的 1、2、3、4 这四块馅饼的宽为 b，长为（$1-b$）。这 4 块馅饼的面积均为 1/5，则可得所有的最终块的总周长为 $4(2+1/\sqrt{5})$，约等于 9.8。

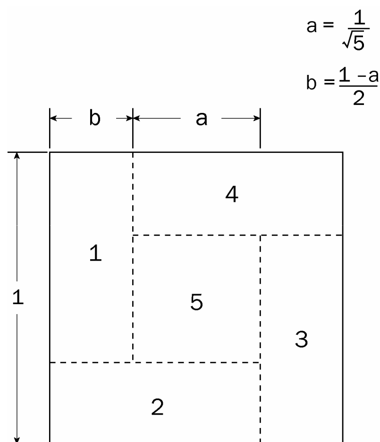


图 22　不再遵守儿童切割规则后，五等分的总周长可以更小

3. 如果是要九等分呢？

若不需要遵守儿童切割规则，九等分的方案类似上题，如图 23 所示。这种切法产生的总周长约等于 15.3。

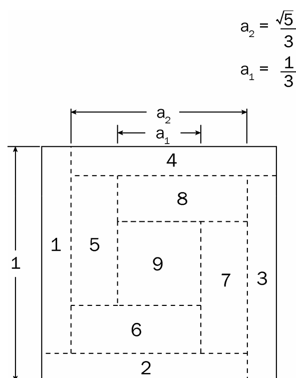


图 23　在不遵守儿童切割规则的前提下，这是我所知的最优的九等分方案

4. 如果除了不需要遵守儿童切割规则之外，切分时还不需要平行于馅饼的某一条边，那么有没有更好的五等分方案使得总周长比第 2 题得到的更短？

如果不需要遵守儿童切割规则，并且切分馅饼的手法可以同原来的某一条边呈某一角度，则可按图 24 所示切分馅饼。这种切分方案优美且经济。每一刀和相邻边的夹角约为 45+19=64 度[①]。按这种方案，最终得到的总周长将接近于 9.4。

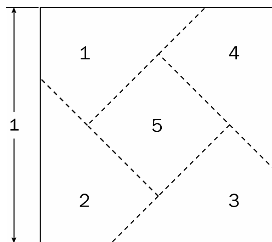


图 24　如果不需要遵守儿童切割规则，且切分馅饼不必平行于某一条边，则所有最终块的总周长能显著缩短

上述解法都是由 TJ・塔凯提供的，这是我所知的最优解法。此外，他是使用 Gnu Octave[②]来求解第 4 题的切分方案的。

① 原文是切面和水平边呈 19 度。实际上，以标记 1 的那一部分为例，连接该四边形对角线，可将四边形分割成两个直角三角形。其中和水平边相邻的那部分是一个等腰直角三角形（即下图中 A 部分），和标记 5 的那个直角三角形的其中一个锐角为 19 度（即下图中 B 部分）。因此每一刀和相邻的馅饼边的夹角为 45+19=64 度。——译者注

② GNU Octave 是一种主要应用于科学计算、数值分析的高级解释性语言，能够用于求解线性、非线性问题的数值解或进行数值试验。同 Matlab 非常相似，很多程序可以很方便地进行移植，可作为 Matlab 的开源替代。——译者注

6.17　幸运轮盘赌

1. 在我第三次开枪之前，你想要我转动轮盘吗？第四次开枪前呢？如果开第一枪时你并没有死，那么使用最优策略，你的存活概率是多少？

如果我不再转动轮盘，那么在我第三次开枪时，你有 1/3 的概率会死。但即使我转动了轮盘，你死于第三次开枪的几率也是 1/3。只是我转动轮盘的好处在于，如果第三次开枪时你存活了下来，那么第四次开枪时你的死亡概率会重新降低到 1/4。

使用这个策略（第二次开枪前不转动轮盘，第三次开枪前转动，第四次开枪前不转动），那么在第一次开枪你没有死的前提下，你存活的概率是 $3/4 \times 2/3 \times 3/4=3/8$。如果我在每次开枪前均转动轮盘（不包括第一次），你存活的概率将会是 8/27，还略小于 1/3。我很抱歉此题采用了如此暴力的设定，希望这样能帮助你在解题时全神贯注。

6.18　法律逻辑

1. 如果每个病人被仪器伤到的概率是 0.005，那么在最初的 50 个病人中，发生一起事故的可能性有多大？

为解题做准备，我们先用随机数生成器写一个程序，程序生成 0 和 1 共 50 次，其中生成 1 的概率为 0.005，代表发生事故，生成 0 的概率为 0.995。然后统计 1 的个数。调用这个程序 10 000 次，你会发现前 50 个病人中发生一起事故的概率大概是 22%。我们也可以通过数学方法分析得出同样的结论：前 50 个病人中至少发生一起事故的概率 = 1–前 50 个病人中没有发生事故的概率 = 1–(1–每个病人被仪器伤到的概率)^{50} = 1–(0.995^{50}) = 0.222。

2. 假设 4000 个病人中，有 18 个为仪器所伤。一共有 8 家医院，每家医院接待 500 个病人。每个病人被仪器所伤的概率是 0.005，并且治疗过程中仪器伤害病人是跟医院无关的，那么至少存在一家医院的事故发生率超过 1%的概率是多少（也就是有超过 6 个病人为仪器所伤）？

为了以实验为依据来解决这道题，我们将 1 到 4000 这 4000 个数按 500 个一组分成 8 组，分别是 1 到 500，501 到 1000……3501 到 4000。编写程序按如下逻辑运行 10 000 次：在 1 到 4000 中以均匀的概率随机抽取 18 个数（不能重复）以模拟发生事故，然后查看是否存在一个组的事故发生率超过 1%。你会发现，至少有一组的事故发生率超过 1%的概率介于 14%和 15%之间。可见，我们设定的这个 1%的概率并不合理。

3. 假设患者的分布是极不均匀的，其中 7 家医院每家只接待了 200 个病人，另外一家医院治疗了其余的病人。那么在相同的条件下（总共有 18 个病人为仪器所伤，每个病人被仪器所伤的概率是 0.005），至少存在一家小医院满足 3 个以上的病人为仪器所伤的概率是多少？

在这种情况下，民事侵权诉讼律师获胜的概率大约为 35%。我们可采取类似于上问的方法，但是此问中 8 组数据分别为：1 到 200，201 到 400……1201 到 1400，1401 到 4000。

4. 假设事故发生率超过 2%的医院就是糟糕的医院。假定每家医院接待 500 个病人，每个病人被仪器所伤的概率是 0.005，且这个概率跟医院无关，那么至少存在一家医院事故发生率超过 2%（有 10 个以上病人为仪器所伤）的概率是多少？

发生这种情况的概率大约为 0.000 5。这个概率相当低，如果真的发生事故的话，那基本上就是医院的责任。

5. 如果有 7 家医院每家只接待 200 个病人，另外一家医院接待了其余的 3600 个病人，其他前提同上一题，那么至少存在一家医院事故发生率超过 2%的概率是多少？

在这种情况下，存在事故发生率超过 2%的医院的概率将增大至 2.5%左右（即 10 000 个病人中有 250 个受伤）。我还是会尽量避开那家医院。

6.19　筹码盒游戏

1. 4 个筹码，每个颜色猜两个盒子，筹码和盒子的各种组合是完全等概率的。在这种情况下，有没有一种策略使得你获胜的概率至少为 1/6？

黑色: 1，2

白色: 1，2

红色: 3，4

绿色: 3，4

筹码和盒子的排列组合一共有 24（即 4!）种，对于其中的 4 种组合，你都能获胜。为什么是 4 种呢？因为黑白两个筹码以任意顺序对应 1 号和 2 号盒子，红绿两个筹码以任意顺序对应 3 号和 4 号盒子。因此你获胜的概率是 4/24，也就是 1/6。我认为这是最优策略了，如果你能想到更好的对策，请一定要知会我。

2. 如果有 6 个筹码，每个颜色猜 3 个盒子呢？

6 个筹码，每个颜色猜 3 个盒子，采用最优策略的话，获胜概率是 1/20。出谜人艾伦・德拉古（Alan Dragoo）给出了如下的通用解法："将所有筹码分成数量相等的两份，将所有盒子也分成数量相等的两份，使第一份筹码里的每个筹码都对应第一份盒子，第二份筹码里每个筹码都对应第二份盒子。那么，对于 n 个筹码 n 个盒子，获胜的概率是$(n/2)! \times (n/2)!/n!$。"当 n 为 6 时，获胜的概率为 $3! \times 3!/6! = 36/720 = 1/20$。

3. 如果推广到 n 个筹码（n 是偶数），每个颜色猜 $n/2$ 个盒子的情况呢？

上题中给出的艾伦・德拉古的解法是我所知的最佳方法。这个解法适用于所有偶数的情况，正好此问也是设定了 n 是偶数。不过，$(n/2)! \times (n/2)!/n!$的值随着 n 的增大很快便趋近于 0。当 n 是 8 时，获胜的概率降低至 1.4%。当 n 是 12 时，便仅有 0.1%了。

4. 如果有 4 个筹码，每个颜色可以猜两个盒子，在存在代理人的新规则下你获胜的概率有多大？（提示：你获胜的概率将超过 40%。）

将 4 种颜色的筹码按如下顺序和 4 个数字对应起来，这只是一个随机的搭配，但将其固定下来有助于我们进行分析。

黑色—1

白色—2

红色—3

绿色—4

将 4 个盒子按照从左到右的顺序标记为 1、2、3 和 4。猜测流程如下。

黑色筹码：1；黑→胜，白→2，红→3，绿→4

白色筹码：2；白→胜，黑→1，红→3，绿→4

红色筹码：3；红→胜，黑→1，白→2，绿→4

绿色筹码：4；绿→胜，黑→1，白→2，红→3

用语言描述如下：负责黑色筹码的代理人首先打开盒子 1 验证，如果盒子 1 里是黑色筹码，则获胜；如果盒子 1 里是白色筹码，则代理人打开盒子 2 验证；如果盒子 1 里是红色筹码，则打开盒子 3 验证；以此类推。假设盒子 1 里是白色筹码，则代理人打开盒子 2；如果盒子 2 里是绿色筹码，则代理人会打开盒子 4。

使用这种策略，对于 24 种可能出现的组合，有 10 种组合是可以获胜的。如下表所示，考虑各盒子中筹码颜色的所有组合。

1	2	3	4	赢/输
黑	白	红	绿	赢
黑	白	绿	红	赢
黑	红	白	绿	赢
黑	红	绿	白	输
黑	绿	白	红	输
黑	绿	红	白	赢
白	黑	红	绿	赢
白	黑	绿	红	赢
白	红	黑	绿	输
白	红	绿	黑	输
白	绿	黑	红	输
白	绿	红	黑	输
红	黑	白	绿	输
红	黑	绿	白	输
红	白	黑	绿	赢
红	白	绿	黑	输
红	绿	黑	白	赢
红	绿	白	黑	输
绿	黑	白	红	输
绿	黑	红	白	输
绿	白	黑	红	输
绿	白	红	黑	赢
绿	红	黑	白	输
绿	红	白	黑	赢

请注意里面有 10 个组合是可以获胜的。

5. 如果有 6 个筹码，每个颜色可以猜 3 个盒子，在新规则下获胜的概率有多大？

6 个筹码的情况下，一共有 720 种组合，有 276 种组合的情况你可以获胜（获胜概率大于 38%）。将 6 种颜色筹码按如下顺序和 6 个盒子关联起来，记此对应关系为 A。对应关系 A 不但可以用来确定每个颜色的初始猜测，还能根据上一个打开的盒子中的筹码颜色确定下一个要打开的盒子。

黑→盒子 1

白→盒子 2

红→盒子 3

绿→盒子 4

蓝→盒子 5

橙→盒子 6

以下是猜测流程。对于任意颜色 X 的代理，它的初始猜测为关系 A 中 X 对应的盒子。如果该盒子中的筹码颜色为 X，那么获胜，代理人完成使命；否则，如果该盒子中的筹码颜色为 Y，则继续查看关系 A 中 Y 对应的盒子。如果该盒子中的筹码颜色为 X，那么获胜，代理人完成使命；否则，如果该盒子中的筹码颜色为 Z，则继续查看关系 A 中 Z 对应的盒子。如果该盒子中的筹码颜色为 X，则获胜；如果不是，你就认输吧。

以白色为例，猜测流程如下：

白色筹码: 2；黑→1，白→胜，红→3， 绿→4， 蓝→5， 橙→6

注意　我最早是从彼得·温克勒（Peter Winkler）那里听到这道题的。后来迈克尔·拉宾（Michael Rabin）又给我讲了猜测流程和代理人的想法。这个问题吸引人的地方就在于可以任意赋值。就像温克勒描述的或者编写的其他几道谜题一样，它们的主旨就是确定一种策略，然后“孤注一掷”。你要么百战百胜，要么屡战屡败——有点像是创业者的心态。

顺便说一下，如果你刚好是个代数学家，那么参与者获胜的解法可以简单归纳如下：生成一个筹码颜色的随机排列，如果对于每个筹码，只要盒子里实际的颜色和生成的颜色排列形成的最长的循环的长度不大于 $n/2$，则说明你能获胜。详细解释如下。首先，我们可以发现，筹码颜色和盒子编号的映射关系其实是筹码颜色的一个重排。例如：

黑→盒子 1

白→盒子 2

这个映射关系可以解释成，黑色排在第一位，白色排在第二位，等等。当然，我们不是移动筹码的位置，只是想说明，如此一来，就可以把筹码和盒子的关系理解成一个排列。我们根据生成的颜色排列，从筹码颜色对应到盒子，再从盒子对应回筹码颜色，以此类推，回到一个之前打开过的盒子，则循环成立。

例如，假设 6 个盒子中装有的筹码颜色如下：

1: 蓝

2: 黑

3: 红

4: 橙

5: 白

6: 绿

生成的颜色随机排列如下：

黑→盒子 1

白→盒子 2

红→盒子 3

绿→盒子 4

蓝→盒子 5

橙→盒子 6

假设我们要寻找红色筹码。根据生成的排列，我们查看盒子 3，而盒子 3 中装有的筹码正好是红色的。因此，红色筹码的循环长度为 1。假设我们要寻找黑色筹码：

根据排列，查看盒子 1。

盒子 1 中实际装的是蓝色筹码。

根据排列，查看盒子 5。

盒子 5 中实际装的是白色筹码。

根据排列，查看盒子 2。

盒子 2 中实际装的正是黑色筹码。

如此一来，我们便获胜了。但是要注意，我们接下来要查看的可能是盒子 1。也就是说，使我们回到首次查看的盒子的筹码一定是我们正在寻找的那个。（以黑色为例，我们首先查看了盒子 1，然后盒子 2 中的黑色筹码又将使我们回到盒子 1。）对于黑色来说，循环为 1→5→2→1，长度为 3。实际上，对于这样的排列，所有颜色都存在长度小于等于 3 的循环。

然而，如果假设 6 个盒子中装有的筹码颜色如下：

1: 蓝

2: 黑

3: 红

4: 白

5: 橙

6: 绿

沿用之前生成的随机排列，这次我们来寻找白色筹码。

首先查看盒子 2。

盒子 2 中实际装有的是黑色筹码。

查看盒子 1。

盒子 1 中实际装有的是蓝色筹码。

查看盒子 5。

盒子 5 中实际装有的是橙色筹码。

查看盒子 6。

盒子 6 中实际装有的是绿色筹码。

查看盒子 4。

找到了白色筹码。

在这种情况下，循环为 2→1→5→6→4→2，长度为 5。

这道题告诉我们：一个寥寥几笔就能描述的解法是不能把谜题的来龙去脉都解释清楚的。

6.20　反馈系数

1. 如果 Pgood 是 0.9，那么在带反馈和无反馈两种策略下，到达终点的概率分别是多少？

如果 Pgood 是 0.9，在带反馈策略下，到达终点的概率约为 0.89。获胜的概率不可能高于 0.9，因为即使你已位于上数第二行邻接终点格的位置，你还是有可能会输。带反馈策略的目标之一就是要在水平方向上缩小起点和终点之间的距离，直至为 0（它们之间的距离是一个格子）。可按照如下的关键递归关系计算获胜概率：假设你离终点格还有 n 步（n>0），如果你和终点格在同一列（第 5 列）上，此时的获胜概率和离终点格还有 n -1 步且水平方向相距一列时是相同的；如果你和终点格不在同一列上，那么在 Pgood 的概率下，你将靠近终点格一列，在 1-Pgood 的概率下，你将远离终点格一列，但无论是远离还是靠近，你离终点格还将有 n -1 步。

如果 Pgood 是 0.9，在无反馈策略下，到达终点的概率约为 0.55。为了计算出无反馈策略下的概率，假设我们的计划是 4 次向右对准，3 次向左对准，这样到达终点的概率最高。基于此计划，在以下 4 种情况下，我们将获胜：7 次对准均成功；4 次向右对准中有 3 次成功，3 次向左对准中有两次成功；4 次向右对准中有两次成功，3 次向左对准中有一次成功；4 次向右对准中有一次成功，3 次向左对准都没有成功。

因此，反馈系数约为 1.6。

2. 要使反馈系数最大，Pgood 应是多少？反馈系数是多少？

要想使反馈系数最大，Pgood 的值并不是预想中的 0.75，而是 0.772 左右。这样，反馈系数最高可至 1.99。

3. 如果我们去掉最右边 3 列和最左边 2 列，那么为了使反馈系数最大，Pgood 应取什么值？假设走到棋盘外面会带来一定的损失。

无论是带反馈还是无反馈策略，我们的路线都可以归纳如下：最开始两步，目标是从第 1 行第 4 列前进到第 3 行第 4 列，接下去两步，继续前进至第 5 行第 4 列，然后再到第 7 行第 4 列，最后到达第 8 行第 5 列。对于无反馈策略，到达终点格的概率是$(((Pgood^2)+((1-Pgood)^2))^3)\times Pgood$。

对于带反馈策略，到达终点格的概率是 $Pgood^4$ 。

综上所述，为了使反馈系数最大，Pgood 应取 0.71，反馈系数最大为 1.75。

艾伦·德拉古对这几题的解法贡献良多。

注意　我有个朋友，他喜欢在没有泳道标志线的游泳池里仰泳。他也承认这样会经常撞到人。

6.21　数字线索

1. 第一对 p 和 q，已知 $\mathrm{lcm}(p, q)=60$，$p\times q=240$，那么 p 和 q 分别是多少？

两数要既满足相乘等于 240，又满足最小公倍数为 60，一共有以下两种可能。

4, 60—不可行，因为 p 和 q 必须都为两位数。

12, 20—可行。

因此 p 和 q 分别为 12 和 20。

2. 第二对 p 和 q，已知 $p\times q=140$，$\gcd(p, q)=2$，那么 p 和 q 分别是多少？

140 的质因数为 2、2、5 和 7，并且 2 是 p 和 q 共有的质因数。因此，一共有以下 3 种可能。

2, 70—不可行，因为 p 和 q 必须都为两位数。

4, 35—不可行，理由同上。

10, 14—可行。

3. 第三对 p 和 q，已知 $\mathrm{lcm}(p, q)=35$，那么 p 和 q 分别是多少？

因为 $\mathrm{lcm}(p, q)=35$，因此 p 和 q 中至少必须有一个含有质因数 5，并且至少必须存在一个含有质因数 7。为满足两位数的条件，p 和 q 都必须同时含有质因数 5 和 7。因此 $p=q=35$。

4. 开启保险箱的密码是由前三条提示推理出的 5 个数字组成的一个数字序列。该数字序列有如下性质：每两个相邻的数的最大公约数呈从左到右严格递增趋势，但是所有的这些最大公约数都是一位数。请问开启保险箱的数字序列是多少？

开启保险箱的密码如下：10 12 20 35 14。10 和 12 的最大公约数为 2，12 和 20 的最大公约数为 4，20 和 35 的最大公约数为 5，35 和 14 的最大公约数为 7。

6.22　智力游戏

1. 要确定一个 5 位的数字序列（不管是什么），最少猜测几次就一定能找到正确答案？请记住，你不需要作出一次完全正确的猜测，只要在最后能根据我的回答推出秘密数字就可以了。

即使所有的回答都在最后才作出，猜 5 次也足够了。可以作如下的猜测。

```
10000
11000
11100
11110
11111
```

接下来解释为什么猜 5 次就够了。我们将 5 位数字的位置从左到右记作 1、2、3、4 和 5。考虑第 i 位的数字。假设第 i 位的数字是 1（$i>1$），那么与之前的 1 相比，第 i 次猜测正确的位数将比之前一次多 1。比方说第四位的数字是 1，也就是说秘密数字形如 xxx1x，因此第四次猜测给出的 11110 将比第三次猜测给出的 11100 多猜对 1 位。反之，如果第四位是 0，那么第四次猜测给出的 11110 将比第三次猜测给出的 11100 少猜对 1 位。

到目前为止，我们可以推测出除了第一位以外所有位的数字。我们可以通过第一次猜测（10000）猜对的位数来推测出第一位的值。例如，假设最后 4 位为 0110，那么秘密数字不是 00110 就是 10110。如果秘密数字是 00110，那么第一次猜测给出的 10000 猜对了 2 位；如果秘密数字是 10110，那么第一次猜测给出的 10000 猜对了 3 位。

事实上，其实 4 次猜测也够了。将第一次和第二次猜测定位为 00000 和 11100。大部分情况下，这样可以快速地缩小秘密数字的范围。例如，如果第一次和第二次猜测分别猜对了 4 位和 1 位，那么秘密数字只有两种可能了：00001 和 00010。因此，我们来集中考虑以下两种困难的情况：当第一次和第二次猜测的正确位数为 2 和 3，或为 3 和 2 时，秘密数字将有 6 种可能性。先考虑第一种情况，第一次和第二次猜测的正确位数为 2 和 3。这样，秘密数字可能是如下几个。

```
01101
01110
10101
10110
11001
11010
```

假设我们下一次猜测是 01110，这个猜测跟前两次都至少有两位不同。针对这一次猜测，可能有以下几种答案。

0—不可能

1—秘密数字还剩下两种可能：10101 和 11001

2—不可能

3—秘密数字还剩下 3 种可能：01101、10110 和 11010

4—不可能

5—秘密数字是 01110

这样看来，唯一有难度的情况是秘密数字还有以下 3 种可能，分别是 01101、10110 和 11010。假设我们继续猜 00101，那么只有以下 3 种答案，但是每个答案都能使我们推出唯一确定的秘密数字。

0—11010
2—10110
4—01101

菲利普・丹尼尔・罗杰斯（Philip Daniel Rogers）给出了这个有点复杂的解法，但此题目前还没有一种优雅且通用的闭合形式解。然而，若作出猜测后不再有任何实时的反馈，就能找到一种非常简洁的解法，下文中将细述。

2. 假设我们修改游戏规则，增加点儿难度：你可以猜若干次，但是我会在所有的猜测都结束后才作出回答。在这种情况下，你猜多少次就一定能破解秘密数字？

令人惊讶的是，我们在上题中使用过的猜测序列对于每个可能的秘密数字都给出了独一无二的“答案”。

```
00000
11100
01110
00101
```

对于不同的秘密数字，就这一猜测序列最后给出的答案序列都是不相同的。例如，假设秘密数字是 11001，那么 00000 猜对了 2 位，11100 猜对了 3 位，01110 猜对了 1 位，00101 猜对了 2 位。因此，答案序列为 2、3、1、2，且不存在其他的 5 位二进制数能产生同样的答案序列。因此，你只需要给出上述的 4 个猜测，然后根据最后给出的答案序列，即可唯一确定秘密数字。当然，我们还可以依靠程序，通过输入猜测序列来计算答案序列，而编写这样一个程序是轻而易举的事。

3. 按照我只在最后才作出“间接”回答，并且不回答第一次猜测的游戏规则，还有可能猜出秘密数字吗（不管这个数字是什么）？如果可以，那么把第一次猜测也算上的话，你一共猜多少次就一定能找出秘密数字呢？

除去第一次猜测外，如果规则修改成你只被告知相比上一次，这次猜正确的位数是增加还是减少了，那么，6 次猜测就足以推出秘密数字了。初始猜测为 00000，猜测序列如下。

```
00000
10000
11000
11100
11110
11111
```

你可以通过猜对的位数是增加了还是减少了来确定每个位置的数字是 1 还是 0。

4. 如果我在你作出猜测后立即作出“间接”回答，为了找出秘密数字，你需要猜多少次？

如果反馈是实时的，汤姆・罗基奇给出了下面的解法，总共只需要猜 5 次。上一题的解法只用到了增加和减少两种答案，而此题解法将三种可能的回答[相同（S），增加（+），减少（−）]均加以利用。初始猜测还是 00000，但是下一次猜测改为 00011（也就是十进制的 3）。相比初始猜测，00011 改变了两位数字。因此，如果答案是 S（猜对的位数和上次相同），那么两个 1 中肯定有一个 1 是正确的，而另外一个是错误的；如果答案是+（猜对的位数比上次多），那么两个 1 都肯定是正确的；类似地，如果答案是−（猜对的位数比上次少），那么两个 1 都是错误的。以此类推，你就能找到那个秘密数字。当无法继续下去的时候，你可以查看下面的流程。

```
[3,
   S:[29,
     SS:[4,
         SS+:[14,
            SS+-:{5},
            SS+S:{22},
            SS++:{14}],
         SS-:[14,
            SS--:{17},
            SS-+:{26},
            SS-S:{9}]],
      S-:[5,
         S-S:{10,18},
         S-+:[10,
            S-+S:{6},
            S-++:{2},
            S-+-:{1}]],
      S+:[5,
         S+S:{13,21},
         S+-:[10,
            S+-+:{30},
            S+--:{29},
            S+-S:{25}]]],
   -:[5,
      -S:[9,
         -SS:{0,16},
         -S+:{8,24}],
      -+:[8,
         -+-:{4,20},
         -++:{12,28}]],
   +:[5,
      +-:[8,
         +-+:{11,27},
         +--:{3,19}],
      +S:[9,
         +SS:{15,31},
         +S-:{7,23}]]]
```

5. 位于冒号左边的是前几次猜测的答案，提问次序通过缩进表示。例如，+:[5 表示如果第一个回答是+的话，那么继续猜 5（也就是 00101）。

推广一下，如果秘密数字的位数为 N，且是基数为 b 的 b 进制数，其中 b>2，那么你需要猜

多少次？例如，如果基数 b 是 10，秘密数字的每一位便可以是 0 到 9 中的任意数字。如果我在你作出所有的猜测后再回答，就需要猜 $1+(b-1)\times N$ 次。但我认为这应该不是最优解。

我们可以沿用第 3 题的思路。以下列举了当所猜的数是十进制时，给出的前 19 次猜测。

```
00000
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000
90000
01000
02000
03000
04000
05000
06000
07000
08000
09000
```

按上述方法，一共需要猜 $1+N(b-1)$次，我等待着聪明的读者能想出一个更好的方法来。

6.23 “拒”中生智

1. 罗萨尔芭：“一共有 5 个整数，但是可能有重复的数。”
   昆廷：“最小值是多少？”
   罗萨尔芭：“20。”
   昆廷：“以下的问题中，有哪一个是我即使知道了答案也无法推断出所有数字的：不一样的数的个数，平均数，最大值或者中位数？”
   罗萨尔芭：“只有中位数。”
   昆廷：“太好了，那我知道答案了。”
   请问是哪 5 个数字？

答：这 5 个数字肯定都是 20。只有这样，根据除中位数外的其他任一统计值，便可推断出所有数字。

2. 罗萨尔芭：“一共有 7 个整数，可能会有重复的数。”
   昆廷：“最小值是多少？”
   罗萨尔芭：“20。”
   昆廷：“以下哪个值是你愿意透露给我的（也就是即使我知道了也不能推断出所有的值）：平均数、中位数和最大值？”
   罗萨尔芭：“都可以说。”
   昆廷：“那好，最大值是多少？”
   罗萨尔芭：“21。”
   昆廷：“我知道在平均数和中位数中，哪一个是你现在愿意告诉我的了。”
   请问是哪一个，为什么？

答：如果知道了平均数的值，便能推断出有几个 20，有几个 21。举例来说，如果一共有 4 个 20 和 3 个 21，那么平均数约为 20.43。而知道中位数的值并没有太大的作用。例如，4 个 20 和 3 个 21，5 个 20 和 2 个 21，这两种情况下，中位数的值都是 20。

3. 罗萨尔芭：“有没有这样的情况，相比中位数，我更愿意告诉你平均数？”
   昆廷：“可以给我点提示吗？”
   罗萨尔芭：“我现在能想到一个例子，一共有 3 个数，其中有两个数是不相同的。”

请试一下找出这个例子。

答：假设一共有 3 个数，其中有两个数不同。如果知道最小值是 20，中位数是 23，那么你就能推出另外一个数也是 23。然而，如果你知道平均数是 22，那么这 3 个数还有可能是 20、20 和 26。

4. 罗萨尔芭：“有没有这样的情况，你需要知道最小值、最大值、平均值及中位数，才能确定这 5 个整数？”

若最小值是 20，最大值是 22，平均数是 21.2。根据这 3 个统计值，5 个整数可能是 3 个 22 和 2 个 20，也可能是 2 个 22，2 个 21 和 1 个 20。只有知道了中位数，才能够唯一确定这 5 个整

数的具体值。

5. 罗萨尔芭：“现在我们准备开始。这次一共有 17 个数，它们有重复。最小值是 30，平均值是 34，中位数是 35。”

   昆廷：“它们到 35 的总距离是多少？”

   罗萨尔芭：“我不想告诉你，但是到 35 的总距离比到 38 的总距离少 5。糟了，我不该告诉你这个的。”

   昆廷大笑:“你真的不应该告诉我，我已经知道所有的数了。”

请问是哪 17 个数?

答：一组数据到中位数点的总距离是最小的。也就是说，如果有 n 个数据（n 为奇数），那么它们到中位数点的总距离要小于它们到任何其他点的总距离。理由如下。假设中位数为 m，记一组数据到 m 的总距离为 x 。下面来考虑这组数据到 $m+1$ 的总距离。由于 m 是中位数,因此有 $(n-1)/2$ 个数是小于等于 m 的。所以，至少有 $1+(n-1)/2$ 个数到 $m+1$ 的距离比到 m 的距离多 1（包括中位数），至多有 $(n-1)/2$ 个数到 $m+1$ 的距离比到 m 的距离少 1。

因此，如果一共有 17 个数，中位数是 35，平均数是 34，到 38 的总距离为 $x+5$，说明这组数据中只有一个 35，没有 36，有一个 37。理由如下。如果这组数据中只有一个 35，没有 36 和 37，那么 35 以下的数到 38 的距离会比 35 多 $3\times8=24$，38 以上的数到 38 的距离会比 35 少 $3\times8=24$，而 35 本身到 38 的距离相较 35 会增加 3。因此，如果是这种情况，到 38 的总距离比到 35 的总距离净增加了 3。而事实上，总距离净增加的值是 5，这意味着肯定有一个数是 37。这样一来，在大于 35 的 8 个数中，除了 37 以外的大于 38 的 7 个数使总距离净减少 $3\times7=21$，37 使总距离净减少 1。于是，我们可以确定，在这组数据中，一共有 7 个数大于或等于 38，另有一个 35 和一个 37。已知平均值为 34，那些大于平均值的数，它们到 34 的总距离至少为 1+3+28（因为已经有 7 个大于等于 38 的，还有一个 35 和一个 37），总值是 32。因此，那些小于平均值的数，它们到 34 的总距离也至少为 32，这样才能互相抵消。如此一来，便能断定，所有小于 34 的数都只能是 30。我们已知这组数据最小不能小于 30，最大不能超过 38，综上所述，这 17 个数是：8 个 30，一个 35，一个 37 和 7 个 38。

6. 假设有 1701 个数，并且罗萨尔芭透露的信息还是同上题一样，你能猜出这 1701 个数吗?

可以套用上题的推理思路，结论是一共有一个 35，一个 37，849 个 38 和 850 个 30。

汤姆·罗基奇为此题构想的清晰化提供了许多帮助。

6.24　棘手的迷宫

1. 我们的挑战是，要找到那个终点页，并且解密这一路上的单词和短语。这些加密的词语（构成了一句关于自然史的名言）及网页的其他部分中都会有一些提示。来试一下吧。

以下是页面号列表和对应的单词及词组明文。

```
f42: if
f37: you
f33: would
f32: see
f39: all
f44: of
f28: nature
f52: gathered
f23: up
f51: at
f17: one
f13: point
f46: in
f53: all
f34: her
f29: loveliness
f14: and
f19: her
f36: skill
f0: and
f2: her
f30: deadliness
f16: and
f4: her
f10: sex
f49: where
f15: would
f31: you
f3: find
f12: a
f27: more
f7: exquisite
f8: symbol
f22: than
f9: the
f6: mosquito <sup>1</sup>
f25: if you have found the whole route to get here, you have solved the maze.
congratulations.（如果能一路跳转到这一页，说明你已经走出这个迷宫了。恭喜你！）①
```

这句话是由伟大的生物学家哈夫洛克·埃利斯（Havelock Ellis）在 1920 年写下的。下次在打死蚊子前，你可以仔细观察一下。

---

① 连起来为 If you would see all of Nature gathered up at one point, in all her loveliness, and her skill, and her deadliness, and her sex, where would you find a more exquisite symbol than the mosquito? 如果你想要看到大自然的所有的特质集中在一个物体上来呈现，包括她的可爱迷人，她的鬼斧神工，她的致命，她的性感，你还能找到一个比蚊子更精致的载体吗？——译者注

6.25　疯狂配比

1. 我们想要调配出 3 升的混合液，其中包含 2.7 升剧毒液。我们只想往下水道中排放不到 10 升的有毒液体。请问如何做到？

首先在 10 升容器里装 9 升剧毒液。（先将 10 升容器灌满剧毒液，然后将液体倒入 7 升容器直至装满，接着将 7 升容器里的剧毒液倒回水槽，将 10 升容器里剩下的 3 升剧毒液倒入 7 升容器中。再次将 10 升容器灌满剧毒液，然后将液体倒入 7 升容器直至装满，由于 7 升容器中已有 3 升液体，所以再倒 4 升即可装满。这样一来，10 升容器中还有 6 升液体。再次将 7 升容器里的液体倒回对应的水槽，将 10 升容器里剩下的 6 升剧毒液倒入 7 升容器。将 10 升容器再一次灌满剧毒液，再将液体倒入 7 升容器直至装满，现在 10 升容器中还剩下 9 升剧毒液。）然后再往 10 升容器中倒 1 升水。将 10 升容器中的混合液倒入空的 7 升容器装满，于是 10 升容器中将剩下 3 升的混合液，其中包含 2.7 升剧毒液。

2. 如果不能将任何剧毒液倒入下水道，我们能得到剧毒液含量为 2/9、其他为纯净水的混合液吗？

首先在 10 升容器里装 2 升剧毒液。过程如下。先将 7 升容器灌满剧毒液，全部倒入到 10 升容器中，然后重复一次，这样一来，7 升容器中现在还有 4 升剧毒液。将 10 升容器里的剧毒液倒回水槽，随后将 7 升容器中的 4 升剧毒液倒入 10 升容器，然后再次将 7 升容器装满剧毒液。现在，将 7 升容器里的剧毒液倒入 10 升容器直至装满，这样 7 升容器中还留下 1 升液体。接着将 10 升容器里的剧毒液倒回水槽，将 7 升容器中的 1 升剧毒液倒到 10 升容器中。接下来将 7 升容器装满剧毒液，全部倒入 10 升容器中，这样 10 升容器中还有 2 升空余。再次将 7 升容器装满剧毒液，然后倒入 10 升容器直至装满，于是，7 升容器中还剩下 5 升。将 10 升容器中的液体全部倒回装有剧毒液的水槽，将 7 升容器中的 5 升液体倒入 10 升容器中。重新将 7 升容器灌满剧毒液，随后倒入 10 升容器直至装满，于是，7 升容器中将留有 2 升液体。接着，将 10 升容器中的液体全部倒回装有剧毒液的水槽。现在，我们只需要将 7 升容器中的这 2 升剧毒液倒入 10 升容器，再将 7 升容器装满水，倒入 10 升容器，即可调配出题中要求的混合液。

3. 我们能将 7 升的容器装满剧毒液浓度为 26%的混合液吗？

有了一个额外的大桶后，我们便可以随意调配出剧毒液浓度为 $p/(p+q)$的混合液，其中 p 和 q 都是整数且 $p+q$ 小于等于 100。操作方法如下。首先装出 p 升的剧毒液倒入大桶，再装出 q 升的水倒入大桶，这样大桶中的混合液浓度即为 $p/(p+q)$。举例来说，假设现在想要装出 53 升液体。你首先将 10 升容器装满 5 次，分别倒入大桶中。然后再次装满 10 升容器，并倒入 7 升容器，这样 10 升容器中便还剩下 3 升，将这 3 升倒入大桶中。在这一问中，我们的目标是调配出 10 升或者 10 升以上的浓度为 26%的混合液。也就是说，如果能配出 13 升剧毒液和 37 升水，那么问题就解决了。13 升剧毒液可以这样配。将 10 升容器装满剧毒液，倒入大桶中。再次将 10 升容器装满剧毒液，然后倒入 7 升容器直至装满。这样，10 升容器里还剩下 3 升剧毒液，也倒入大桶。当

然了，37 升水则更容易获得（3 个 10 升+一个 7 升）。一旦在大桶里调配出需要的浓度，便可将混合液倒入到 10 升容器中，10 升容器里将含有 2.6 升剧毒液。

此题解法由弗拉德・西密昂涅斯库（Vlad Simionescu）提供。

4. 假设我们想要调配出如下配置的混合液，纯剧毒液、含 1/2 剧毒液、含 1/3 剧毒液、含 1/4 剧毒液……含 1/50 剧毒液。你可以自行选择两个容器的容量。但要注意，小容器至少能装 1 升，大容器至多装 30 升。容器的容量不一定要是整数，甚至可以带小数。此外，你还有一个容量超过 100 升的大桶。要配置出特定比例的混合液，你要如何选择两个容器的容量？基于你给出的容器容量，要如何调配给定浓度的混合液？

根据题目要求，我们需要调配出浓度从 1/2 到 $1/k$ 的所有混合液，其中 $k=50$。选取 0.6 升为基本单位，较小容器的容量定为 17 个单位，即 10.2 升，较大容器的容量定为 50 个单位，即 30 升。由于 17 是质数，因而不需要额外的大桶，就可以凑出任意介于 1 和 49 个单位之间的液体（包括 1 和 49）。我们可以先装出 1 个单位的剧毒液，倒入大桶中（实际上这个大桶可以非常小），然后装出 k 单位的水，和 1 个单位的剧毒液混合，即可获得浓度是 $1/(k+1)$的混合液。

这个特别优雅的解法是由伊万・热赞卡提供的。同时，对于没有额外大桶的情况，伊万也给出了相应的解法。在这里简单提示一下：他的做法是直接在较大的容器中放入一定量的剧毒液，使得当较大容器被水灌满时，剧毒液的浓度正好达到要求。其中较大容器的容量是 L 个单位，L 是 2，3…k 所有这些数的最小公倍数。

6.26　寻找地道

在解答方案中，称南北向的路为列，东西向的路为行。中心线为第四列，两端分别是起点和终点。

1. 如果地道最长占地 8 个街区，且起点和终点的位置如图所示，那么最少需要多少台探测仪，才能确保在 1 个小时内确定地道的准确路径？

因为起点和终点的直线距离为 6 个街区，所以，地道最多只能偏离中心线一个街区。基于此，如图 25 所示，圆圈代表十字路口，将探测仪架在距离中心线一个街区的 6 个十字路口。

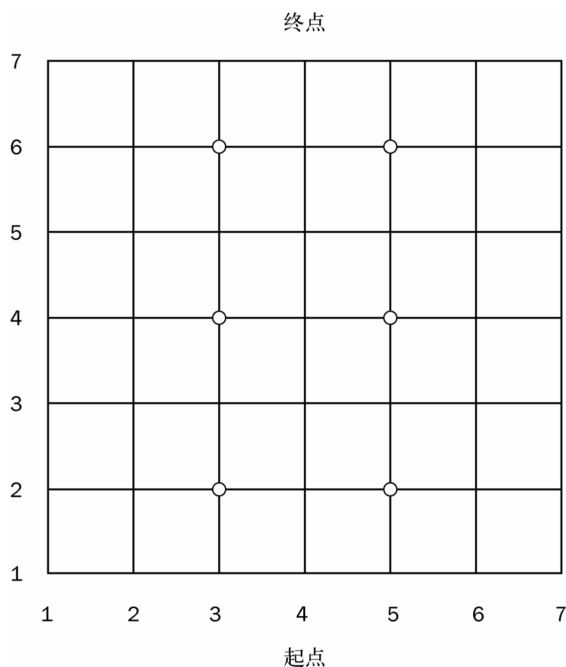


图 25　由于知道地道经过该十字路口后的走向，因此，通过某一行的一对探测仪，便可确定地道是否经过该行并延伸至下一行

理由如下。如果 6 台探测仪都没有探测到地道，就说明地道是直接沿中心线连通南北的，除此之外别无可能，因为是不存在回路的。如果有一个探测仪（以圆圈表示）探测到了地道，我们能分辨出地道从哪里来，向何处去。例如，如果第 2 行的两个探测仪都没有探测到地道，那么至少在东西向的第 3 条街道之前，地道是一直是沿着中心线的。反之，如果第 2 行第 5 列的探测仪检测到了地道自西而来并向北而去，那么我们能推断出：地道从起点开始，沿中心线向北一个街区，然后向东一个街区（遇到探测仪），随后继续向北延伸一个街区（到达第 3 行第 5 列）。总的来说，第 i 行的一对探测仪可以确定：地道从第 $i-1$ 行过来是沿着哪一列，到达第 $i+1$ 行又是沿

着哪一列。知道这些已经足够确定地道在每一行的东西走向了。

2. 如果你只有一台探测仪，并且假设每小时你可以移动它一次，那么找出地道的准确路径最少需要多少时间？

你在 6 小时内肯定能找出地道的走向。如图 25 所示，你只需依次探测图中标记的探测仪放置点。假设在前 5 次探测中一无所获，那么无论还剩下哪个点没有测，此时你都无法确定地道的走向（地道可以沿着中心线连接起点和终点，也可以偏离中心线一个街区经过没有探测的位置）。当然，如果有两个探测仪都有发现，说明其中一次是偏离中心线，另一次是再次回到中心线，这样你便可以提前收工了。但要注意，可不是每次都能这么幸运。

3. 如果地道最长占地 8 个街区，且起点和终点的位置如图所示，那么最少需要多少台定点探测仪，才能确保在 1 个小时内确定地道的准确路径？

一共需要 9 台探测仪，其分布如图 26 所示。

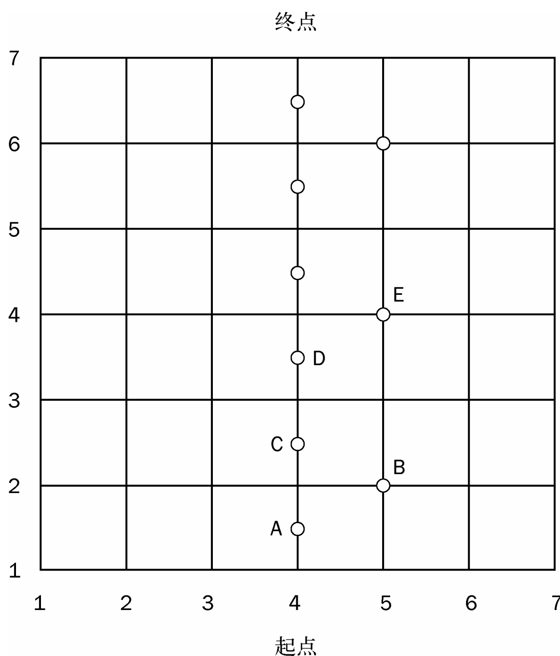


图 26　凭借分布在中心线上的探测仪，可以推断地道是否沿着中心线。如果不在中心线上，就说明地道肯定向东或者向西偏离。由于地道的长度有限，因此不可能朝两个方向都有偏离。即使不看解释，你也能够分析出地道是经过哪两行之间的列了吧

先分析第 1 行到第 2 行的走向：如果探测仪 A 和 B 均没有检测到地道，就说明地道是通过第 3 列从第 1 行延伸到第 2 行的；如果 A 检测到地道，就说明地道沿着第 4 列；如果 B 检测到，但

是 A 没有检测到，就说明地道是通过第 5 列从第 1 行延伸到第 2 行的。对于第 2 行到第 3 行：如果 C 和 B 都没有探测到，说明地道经过第 3 列；如果 C 检测到，说明地道经过第 4 列；如果 B 检测到但 C 没有，说明地道经过第 5 列。以此类推，第 3 行到第 4 行的推理类似第 1 行到第 2 行：如果 D 和 E 都没有检测到，则地道经过第 3 列；如果 D 检测到，地道经过第 4 列；如果 E 检测到，地道经过第 5 列。第 4 行到第 5 行类似第 2 行到第 3 行，以此类推。

4. 为了在两个小时内确定地道的准确路径，你最少需要用几台定位探测仪？

第一个小时，只在中心线上布设探测仪，具体分布同图 26。第二个小时，在第一个小时内没有探测的位置的东面布设探测仪。如果探测到了，说明在地道重新回到中心线之前，它将一直在东面延伸。因为地道的总长度最多为 8 个街区，所以它不可能既在东面，又在西面。

威尔士的彼得 · 卡彭特（Peter Carpenter）对此题的解法提供了不少帮助。汤姆 · 罗基奇给出了第 3 问和第 4 问的答案。

如果地道可以更长的话，此题的难度就将大幅度提高。是否存在一个通用解呢？这是一个有待解决的问题。

6.27　天生一对

1. 请问鲍勃和爱丽丝是完全相容，还是部分相容，亦或两者都不是？请试着通过去掉最少数量的边（0 条、1 条或者双方都舍弃点儿偏好），找出一个双方相容的偏好排序。

他们部分相容。若鲍勃舍弃 M→C 这个偏好（似乎意味着他应该在提高自身的修养上多放点心思），将存在满足双方的偏好排序，如：BRKCWFPOEMHTJ。

2. 从企业家的角度,你能否替咨询公司设计一个算法，通过舍弃尽可能少的偏好，帮助那些陷入婚姻困境的夫妇？

我们需要用到图论的知识。将图中的每个圆圈看做一个“顶点”，每个箭头代表一条有向边。采用图论的表示方法，设图 G1=(N1, E1)，其中 N1 是图 G1 的顶点的集合，E1 是图 G1 中连接顶点的有向边的集合。同样地，G2=(N2, E2)。

在以下伪代码中，符号∪表示两个集合的并集。例如，{X, Y, Z} ∪ {Z, W} = {X, Y, Z, W}。同样，符号∩表示两个集合的交集。例如，{X, Y, Z} ∩ {Z, W} = {Z}。最后，减号（-）表示两个集合的差集。例如，{X, Y, Z} - {Z, W} = {X, Y}。

如果从顶点 X 出发，沿有向边前进，最后能回到 X，则称此轨迹为“圈”。如果存在某个顶点，没有任何有向边指向它，则称此顶点为“根”。

以下是伪代码。

给定两个喜好图，记为 G1=(N1,E1), G2=(N2,E2)

记图 H= {N1∪N2, E1∪E2,标记边集}

其中标记边集和 E1∪E2 大小相同，生成规则如下：

(1)如果边 e 属于 E1∩E2，e 的标记为空；

(2)如果边 e 属于 E1-E2，e 的标记为 1；

(3)如果边 e 属于 E2-E1，e 的标记为 2。

要找到同时满足双方的偏好排序，首先要在那些标记为 1 或 2 的边中找出少出尽可能少的可以舍弃的边，通过去掉这些边使 H 图中不再存在圈。

在 H 图成为无圈图后，通过下述过程生成偏好排序：首先将 H 图的“根”顶点所代表的爱好加入偏好排序中，随后在图中去掉此顶点和所有以该顶点为起点的边；在新生成的图中继续上述操作，在偏好排序中依次加入新的“根”顶点所代表的爱好，不断循环重复。

这段伪代码之所以可行，是因为在无圈图中，总是存在一个顶点的排序，使得所有有向边的出发顶点在排序中都位于该边所指向顶点的前面。为了使 H 图成为圈图，需要去掉若干条边，我们只需在标记不为空的边集中寻找这些边即可。

严格说来，这不能算是一个算法，因为对于如何找出最少的可舍弃的边，伪代码中只字未提。事实上，这是一个 NP 完全问题（详见第二部分），所以要找出最少数量的这种边非常困难，但启发式算法，例如模拟退火算法（也详见第二部分），却非常适合求解此类问题。

6.28 概不找零

1. 如果你事先不知道商品的价格，只知道价格是介于 1 到 100 的整数（包括 1 和 100），那么为了使克劳德能扣下的找零最少，你要如何开具 3 张支票呢？

如果 3 张支票的面额为 15 美元、30 美元和 60 美元，那么无论商品的价格是多少，克劳德最多能扣下的找零都是 14 美元。理由如下。请注意组合这 3 张支票，你可以凑到下列价格：15 美元、30 美元、45 美元、60 美元、75 美元和 105 美元。这些价格之间均只相差 15 美元，因此任何价格在 1 美元和 100 美元之间的商品，最多只会和这些价格相差 14 美元。

2. 假设克劳德要在广告上公布 4 件商品的价格，它们都是整数，而且你也能看到这个广告。那么他要如何定价，才能保证无论你怎么设计支票的金额，也至少存在一件商品，能让他留下一定数额的找零？

克劳德可以这样发布 4 件商品的价格：50 美元、51 美元、53 美元和 59 美元。假设你试图找出一组支票，使得无论你的孩子买哪件，都不会给克劳德留下找零。首先，必须有一张支票小于等于 50 美元，不然买价格为 50 美元的商品一定会有找零。如果一张支票的面额正好为 50 美元，考虑到要能买到每样商品，那么必须还有两张面额分别为 1 美元和 8 美元。但是这样一来，就凑不到 53 美元这个价格。如果一张支票的面额小于 50 美元，记为 x ，那么还需要一张支票面额为 $(50-x)$美元。剩下的一张支票必须要保证能凑到 59 美元，这么一来，51 美元和 53 美元这两样商品就肯定得找零了。克劳德总是能获胜。

6.29　寂静深海

1. 假设血压是 3 位数，那么如果每个部门都只回应一个 3 位数，船长有没有可能推测出一个血压值，它一定是所有血压值中位于中间的 10 个值之一？

每个部门可以回应该部门的血压中位数。如图 27 所示，将 5 个部门的中位数按升序排列，分别记为 M1、M2、M3、M4 和 M5，它们对应的部门记为 G1、G2、G3、G4 和 G5。

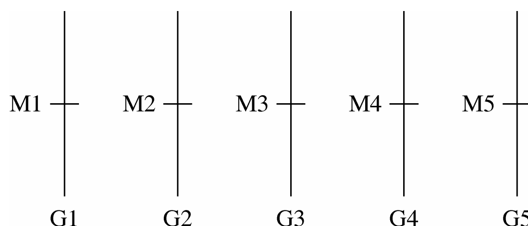


图 27　将 5 个部门的中位数的值按照升序排列，则有 M1≤M2≤M3≤M4≤M5。在代表各部门的线段中，想象该部门最低的血压值位于线段底部，最高血压值位于线段顶部

血压值 M3 一定是 25 个血压值中中间位置的 9 个值之一。理由如下。G3 部门中有两个船员的血压小于等于 M3，G2 中 3 个最低的血压值也一定小于等于 M3，G1 中 3 个最低的血压值也一定小于等于 M3。这意味着至少有 2+3+3=8 名船员的血压值小于等于 M3，即图 28 中的黑色部分。

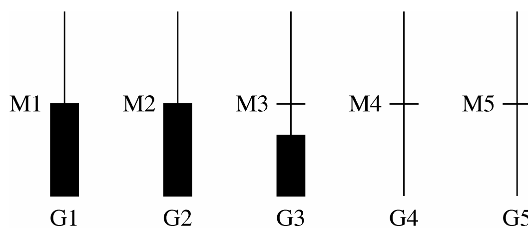


图 28　黑色矩形块代表小于等于 M3 的值

相应地，至少有 8 名船员的血压值大于等于 M3。也就是说，M3 肯定大于等于至少 8 个值，且小于等于至少 8 个值，因此 M3 一定是中间 9 个值之一。

2. 船长想要找到两个血压值，其中一个保证小于或等于中位数，另外一个保证大于或等于中位数。其他的假设如第 1 题，在每个部门报告一个 3 位数之后，船长有没有可能找到这样的血压值？

还是一样，船长要求各个部门返回血压的中位数。将 5 个中位数按升序排列，记为 M1、M2、M3、M4 和 M5。船长可以确定，M1 小于等于 25 个血压值的中位数，M5 大于等于 25 个血压值的中位数。理由如下。M1 小于等于 G1 中的两个血压值，也小于等于 G2、G3、G4 和 G5 每个组

中的 3 个血压值，总共是 14 个血压值，也就是图 29 中所示的黑色矩形部分。因此 M1 肯定小于等于整体的中位数。同理可得，M5 肯定也大于等于整体的中位数。

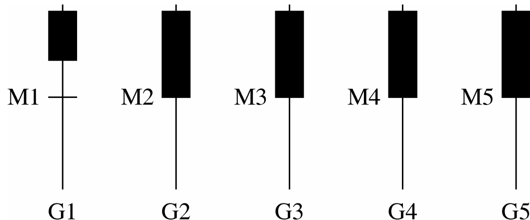


图 29　黑色矩形块代表大于等于 M1 的值

注意　这种使用“中位数的中位数”的解法源自“顺序统计”中的“选择算法”[①]。一些有史以来最伟大的算法家，如布卢姆（Blum）、弗洛伊德（Floyd）、普拉特（Pratt）、李维斯特（Rivest）和塔扬（Tarjan），都曾撰文介绍过这种方法。

① “顺序统计”（order statistic）中的“选择算法”（selection algorithm）是一种用于在一个列表中查找第 i 小的数的算法，这个数也被称为第 i 个顺序统计量。——译者注

第二部分 解题密钥

拉维（Ravi）、普拉萨德（Prasad）和我至今仍在同一家软件公司工作。我们都上过“启发式求解”的课程。我们公司的创始合伙人一直对从这个班招聘员工的主意赞不绝口。

——纽约大学“启发式求解”课程的一名毕业生

谜题的迷人之处，部分在于它们跳脱了公式化的解题方法。我经常碰到这样的学生，他们非常擅长微积分和离散数学，但面对一些只需要最基本的代数知识就能解决的谜题时却束手无策。创造力并不是问题所在。有些人对谜题所提供的自由思考的空间感到陌生，甚至有点被吓到。在本部分，让我们一起驱走心中的畏惧。

那些最巧妙的谜题，一开始可能会让你觉得根本无解，最终你逐一分解，尝试各种方法才解决了它们。现实中，面对所有大型的工程和软件项目，类似的过程往往也是必要的，可能这就是谜题被用于求职面试的原因之一。（另一种理论是面试官想用谜题来难倒求职者，看他们局促不安的样子。我承认确实有那么一点儿心理因素。）

几年前，如果你问我该如何提高解决谜题的能力，我或许会建议你多做点题，通过做题掌握其中的规律。但是近来我意识到，可以总结出一些特定的模式，且这些模式的作用也尽显无余。基于这个理念，我在纽约大学开设了课程。从开篇引述的那段话就可以看出，这门课似乎对工作业绩有着莫大的帮助。顺便说一下，我绝对不是第一个开课传授谜题技巧的人。斯坦福大学的唐纳德 • 克努特（Donald Knuth）和哥伦比亚大学的肯 • 罗斯（Ken Ross）在我之前都开设过类似的课程，因此我能证明这样的课程还是有必要存在的。

好吧，我可能夸大了谜题的重要性。但根据我个人的观察，人们想要解决的大部分问题都是 NP 困难问题（需要穷举搜索才能确保找出最佳的答案——请参阅下面注记中的内容）。无论你是在分配编译器中的寄存器，还是在对齐基因组，亦或是分配飞机座位，都会遇到这样的问题。当然，作为一名程序员，你可以选择避开这些问题，只写写应付账款系统之类的程序，但话说回来，

不正是这些难题才使我们的工作妙趣横生吗？

什么是 NP 困难（NP-hard）问题？

NP（non-deterministic polynomial，非确定性多项式，缩写 NP）问题是指存在一个多项式时间的算法可以验证其解的正确性，其中多项式时间的算法是指计算时间不大于问题输入的规模的多项式倍数。例如，你让我在 17 个城市之间找出一条花费不到 3000 美元的路线，然后我给出了路线 R，你通过把 17 个城市的路费相加很容易就可以计算出这条路线的花费。在此例中，验证路线花费的时间是城市总数的线性倍，也就是级数为 1 的多项式。然而，找出符合条件的路线，可能要比验证它更难。直观地说，所谓 NP 完全（NP-complete）问题，是指可在多项式时间内验证解法的正确性，但还没有已知的多项式时间的算法可求解此题。（完整的形式化定义还会涉及可归约性的概念，具体可参见教科书，此处不详述。）比如，在一组城市中找出一条花费小于给定数目的路线，这是一个 NP 完全问题。相比之下，如果一个问题是 NP 困难问题，是指目前还没有已知的多项式时间的算法可求解此题，甚至可能都无法在多项式时间内验证解法。

其实大量的谜题都可以用排除法解决（或者，你可以称之为“面向约束”的谜题），在本部分我们会探讨很多此类难题。智力题的书中都充斥着这种类型的谜题，其中，一个最为现代人所熟知的便是“数独”（Sudoku）。可以采用排除法的谜题都会给出一些起始条件、一堆约束和一个目标状态。解题的过程就是从起始条件出发，在满足所有约束的情况下，达到目标状态。

此类谜题所体现的推理也常常被应用于设计问题。从根本上来说，这类推理要求是一种面面俱到的分情况讨论的技巧。当然，如果只有少数几种情况，那么分析过程还能算是有趣，可如果可能的情况众多，分析过程将是痛苦不堪的。正因为如此，我在本部分的谜题中，将给出简单的示例伪代码作为解法，我鼓励大家用自己最钟爱的编程语言来解决这些问题。

我们在进行分情况讨论时，往往需要作出假设，推理过程形如：“假设以下条件成立，那么……”有时，按某种假设得不到想要的结果，这时你就可以排除这种情况，尝试另外一种。对于一些简单的游戏，例如数独，这种先猜测后检验的方法往往很有效，因为要讨论的情况总数一般远远低于 1000，但通常多于 20。

如果可能的情况数量庞大，你就会转投其他的方法了。其中，我最喜欢的是动态规划技术。动态规划最经典的例子便是字符串编辑距离（它是 Unix/Linux 中 diff 程序的基础）：给出两个长字符串，由其中一个转成另外一个所需要的最少的编辑操作序列次数，编辑操作包括插入一个字符、删除一个字符及将一个字符重写成另一个字符。你可以先拿以下两个虚构的基因串练练手：TGGAGACAGTCT 和 TAGATGGTCT。

如果不用动态规划，你可以想出大量可行的编辑操作序列，但把这些序列一一列举出来以找出最简洁的方案却是一项艰巨的任务。而动态规划却能提供一种容易编程实现的、高效的方法，

且保证能找出最优解。

不过动态规划不是万能的。对于经常碰到的 NP 完全问题，为了避免穷举搜索[1]，我们还得求助于启发式算法[2]。在这里，将给出我最喜欢的一种启发式算法“模拟退火”的伪代码，希望你能将它应用于一些 NP 困难的谜题上。我们从简单的开始。如果在这一过程中遇到困难，请记住，那些应用在简单谜题上的技巧，同样适用于后面的难题。

① 俄罗斯人更习惯用“perebor”这个术语，即指蛮力搜索、穷举搜索——我喜欢这个词的感觉。我脑海中立刻能浮现出一只勇敢的俄罗斯熊奋力掏蜂窝的画面。

② 一个基于直观或经验构造的算法，在可接受的开销（指计算时间和空间）下给出一个可行解，该可行解与最优解的偏离程度不一定可以预计。——译者注

第 7 章

谜　　题

7.1 年龄排位

这道题便是排除法的典型应用，你可能会在门萨风格的书中看到此题。这些锻炼思维能力的书中总会介绍许多这种类型的题目。

P³ 安德鲁（Andrew）、卡罗尔、杰西卡（Jessica）、卢克（Luke）和汤米（Tommy）围坐在一张圆桌旁。卡罗尔比她左边的邻座大 12 岁，汤米比他右边的邻座大 5 岁，杰西卡比她左边的邻座大 14 岁，卢克比他左边的邻座年轻 5 岁。他们 5 个人按照年龄从小到大依次为：卢克、汤米、安德鲁、杰西卡和卡罗尔。卢克是 16 岁，卡罗尔是 40 岁。他们 5 个人的年龄之和为 135。请问，他们 5 个人就坐的顺序是怎么样的（从汤米开始按顺时针顺序）？他们的年龄分别是多少？你可以先做做看，如果你已经把它解决了，或是准备好要看答案了，那就请继续往下读。

我们从最具体的条件出发：已知卢克 16 岁，卡罗尔 40 岁，他们的年龄之和是 56 岁。这意味着汤米、安德鲁和杰西卡的年龄之和为 79（135−56=79）。进而，我们可以推出汤米和卢克是相邻的，因为卢克的左邻座是 21 岁，如果他的邻座不是汤米，那么汤米和卢克左邻座的年龄都将小于等于 21 岁（因为汤米是第二小的，仅次于卢克）。这样一来，最后一个人的年龄至少是 79−42=37 岁。但是卡罗尔比她的左邻座大 12 岁，因此肯定有个人是 28 岁。综上，以汤米开始的顺时针顺序为汤米，然后是卢克。这意味着，汤米、卢克和卡罗尔 3 个人的年龄总和为 21+16+40=77。

因此，杰西卡和安德鲁的年龄之和为 135−77=58。而已知杰西卡要比安德鲁大，且卡罗尔的左邻座肯定为 28 岁，于是，安德鲁是 28 岁，杰西卡是 30 岁。

根据年龄很容易就推断出各人的座次。假设顺时针顺序是：汤米、卢克、卡罗尔，由于卡罗尔 40 岁，因此这样的排序是不可能的。这说明，卡罗尔的左邻居是 28 岁的安德鲁。

如此一来，还有两种可能。

- 汤米、卢克、杰西卡、安德鲁和卡罗尔
- 汤米、卢克、安德鲁、卡罗尔和杰西卡

而事实上，只有第一种情况是符合条件的。因为杰西卡要比她的左邻座大 14 岁，那只能是卢克。因此我们得出结论，顺时针顺序为：

汤米（21 岁）、卢克（16 岁）、杰西卡（30 岁）、安德鲁（28 岁）和卡罗尔（40 岁）

如果想要在短时间内解决大量的此类问题，你该怎么做呢？如果可能的排位情况不多，我建议你把所有可能的情况都列出来，对每种可能的座次，填入你已知的年龄，看看是否可行。在此例中，当列到正确的座次时，我们填入已知的年龄：

汤米、卢克（16 岁）、杰西卡、安德鲁和卡罗尔（40 岁）。

然后根据各种已知条件，再填入其他年龄：

汤米（21 岁）、卢克（16 岁）、杰西卡（30 岁）、安德鲁（28 岁）和卡罗尔（40 岁）。

但如果存在大量可能的情况，那么靠一一枚举显然是不可行的。这个时候，你最好先确定局部的排序（就像我们先确定了汤米和卢克的位置那样），然后对后面可能的情况进行排序。

重点是，其实只要写一个像下面这样的简单算法，便能适用于很多谜题：

```
for 每种排序 R
  尝试验证各种约束
  如果某个约束条件不满足，则拒绝 R
end for
```

编写程序通过穷举法来解题，不需要太多的人工参与。用程序替代复杂的手工分析，将是本章重复出现的主题。纯粹主义者可能持有异议：让计算机盲目地尝试各种可能性简直就是对思考的曲解。我的第一反应是：那就这样好了。第二反应是：当可能的情况呈爆炸式增长时，我们很快便会需要重新设计一个更好的算法，这时思考就会极为快速地再次发挥作用。

7.2　城市规划

面向约束的问题可出现在多种场景之中。其中，城市规划问题将几何和推理结合在了一起，因而极具挑战性。在这道谜题中，你的任务是将一个小城镇规划到城区中，并且要满足一定的约束条件。

在此题中，采用曼哈顿距离作为计量单位。A 街区和 B 街区之间的曼哈顿距离，是指它们相距最近的角落之间的东西向街道的数量加上南北向街道的数量。也就是说，如果 B 街区紧挨 A 街区东侧，那么它们之间的距离是 1。如果 B 街区在 A 街区的西南边，并且从 B 街区的东北角走到 A 街区的西南角，需要穿过 5 条东西向的街道和两条南北向的街道，那么这两个街区之间的距离为 7。

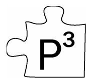
以下是约束条件。工业区（I）和每个住宅区（H）之间至少要相隔 8 个街区；每幢办公楼（O）和每个住宅区（H）之间要相隔 2 到 6 个街区（包括 2 和 6）；每个住宅区（H）的两个街区的距离内都要有个商业区（S）；每个商业区（S）在一个街区的距离内要有个仓库（W）；每个仓库（W）和工业区（I）的距离至多为 6 个街区；每个住宅区（H）一个街区距离内都要有一个公园（P）。没被开发的街区记为空地（X）。

每个街区只能用作一种用途。每个城镇需要有 5 个街区为住宅区，2 个街区为商业区，1 个街区为工业区，2 个街区为仓库，还有 3 个街区为办公楼。你可以自行决定公园的数量。

(1) 如果城镇是正方形的，那么每一边至少必须有多少街区？

(2) 基于你第 1 题给出的答案，请找出一种规划方案，使得空地（X）和公园（P）能够形成尽可能大的矩形区域（指面积），你的客户正考虑在那里建一个体育馆。请展示你的规划方案。

(3) 如果去掉一个约束条件，并且不考虑体育馆的问题，那么每一边至少需要有多少街区？应该去掉哪个约束条件呢？请展示一个规划方案。



答案

1. 如果城镇是正方形的，那么每一边至少必须有多少街区？

每一边至少要有 6 个街区，这是由工业区和住宅区之间的最小距离所限。若每一边只有 5 个街区，那么只要住宅区多于一个，此约束条件便不可能被满足。这一约束条件也表明工业区只能在角落上。

2. 基于你第 1 题给出的答案，请找出一种规划方案，使得空地（X）和公园（P）能够形成尽可能大的矩形区域（指面积），你的客户正考虑在那里建一个体育馆。请展示你的规划方案。

图 30 展示了一个可行的规划方案。体育馆的面积可以有 3 乘以 5，也就是 15 个街区。

I	X	X	X	X	X
X	X	X	O	O	O
X	X	X	X	W	S
X	X	X	W	P	H
X	X	X	S	H	H
X	X	P	H	H	P

图 30 I 代表工业区，O 代表办公楼，W 代表仓库，S 代表商业区，H 代表住宅区，P 代表公园，X 代表空地。工业区必须远离住宅区

3. 如果去掉一个约束条件，并且不考虑体育馆的问题，那么每一边至少需要有多少街区？应该去掉哪个约束条件呢？请展示一个规划方案。

如果可以去掉工业区和住宅区之间最小距离的约束，比方说，引入的是无污染的绿色工业，那么城镇的规模就可以缩小至 4 乘以 4，如图 31 所示。这样一来，城镇中可以有一整块空地。

X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	I	O	W	S
X	X	O	W	P	H
X	X	O	S	H	H
X	X	P	H	H	P

图 31 由于引进的是绿色无污染的工业，因此有可能将工业区及其他各类用途的街区都集中在一个 4 乘以 4 的正方形区域内

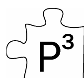
7.3　任务调度

你有一堆任务要分配给机器人。这些任务之间没有任何优先约束，未规定哪个任务要先于哪个完成。每个任务都需要一定的时间，并且都规定了最后期限。你的前任向你保证，有足够的时间让机器人在规定期限内完成所有的任务，但是他不记得具体是怎么分配的了。（你可以看出来，他做事毫无条理，所以他是你的前任而不是你的老板。）所以现在，你要合理安排各项任务，使得机器人能够按时圆满完成所有任务。

(1) 将当前记为第 0 天，那么从第 0 天开始以下任务的执行顺序是怎样的？

任务 T1 需要 4 天完成，截止日期是第 45 天。
任务 T2 需要 4 天完成，截止日期是第 48 天。
任务 T3 需要 5 天完成，截止日期是第 25 天。
任务 T4 需要 2 天完成，截止日期是第 49 天。
任务 T5 需要 5 天完成，截止日期是第 36 天。
任务 T6 需要 2 天完成，截止日期是第 31 天。
任务 T7 需要 7 天完成，截止日期是第 9 天。
任务 T8 需要 5 天完成，截止日期是第 39 天。
任务 T9 需要 4 天完成，截止日期是第 13 天。
任务 T10 需要 6 天完成，截止日期是第 17 天。
任务 T11 需要 4 天完成，截止日期是第 29 天。
任务 T12 需要 1 天完成，截止日期是第 19 天。

提示　此题最好采用最早截止时间算法，其实光看名字就能大概明白这个算法了。



答案

1. 将当前记为第 0 天，那么从第 0 天开始以下任务的执行顺序是怎样的？

对于这一问题，你应该不会想让计算机把所有可能的执行顺序都枚举一遍，因为一共有 12! 种可能。要把它们都列举出来可得花上一段时间，如果任务的数量上升至 20 个，那就更不实际了。根据提示，我们可以采用“最早截止时间”这个名副其实的高效调度算法来安排任务。实际上，算法的名字已经高度概括了其精髓。也就是说，首先完成截止时间最早的任务，然后完成第二早的，依次类推。因此，任务的执行顺序如下：

```
T7  T9  T10  T12  T3  T11  T6  T5  T8  T1  T2  T4
```

如果根据调度顺序，所有的任务都能按时完成，我们就称之为“好调度”。如果对于一组任务，存在着一个“好调度”，那么采用最早截止时间就保证能找到这样的调度。这也是此算法的一大优点，而且证明过程也相当简洁优美。在继续往下读之前，你可以先想想看该如何证明。

假设在好调度 S 中，任务 T 的截止时间晚于任务 T'，但是任务 T 先于任务 T'执行。进一步假设，T 是调度 S 中第一个出现上述情况的任务。由于 T 和 T'都是在截止时间之前完成的，那么调换 T 和 T'的执行顺序，仍然可以保证这两个任务都在截止日期之前完成。（具体来说，假设 T 的截止时间为 d，T'的截止时间为 d'。根据假设 d'<d。在原来的调度 S 中，T 和 T'都按时完成了，也就是都在 d'之前完成了。那么调换它们的执行顺序，还是可以都在 d'之前完成。）因此，对于一个不按照最早截止时间调度任务的“好调度”，我们总是可以通过调换任务，使得任务的执行顺序按照截止时间排列。

不过对于过载系统，最早截止时间将会是一个非常糟糕的策略。比如，要添加一个新任务到上述的任务列表里，使得按最早截止时间执行任务时，每个任务都不能按时完成，那么这个新任务的最短执行时间是多少？我们假设即使任务 T 的截止时间已过，机器人还是会继续执行，其中任务 T 是所有未完成的任务中截止时间最早的。来试试看吧。

只需添加一个需要执行 3 天，但截止时间却是第 2 天（或者更早）的任务。这个新任务不可能在它的截止时间之前完成，并且会使其他每个任务都延期完成。

继续执行过了截止时间的任务，这似乎很愚蠢。更好的做法是，舍弃一些任务来完成其他的任务。在 7.10 节中，我们将会详细探讨这样的策略。而此题的关键点是，这种朴素的贪心算法往往很脆弱，也就是说，一开始它可能会非常有效，但在系统达到一定负载后，它就会完全失效。

7.4　海底寻宝

前面的 3 道题都有一种通用的解法（虽然有点低效）：尝试所有可能的情况，依次验证是否满足约束条件。而这道题则需要一定的几何知识。

在海底一片平坦的沙地里，埋有一个海盗的藏宝箱，里面有价值数百万美元的珠宝。为了定位藏宝箱，你的客户已经在那块区域下放了两个传感器。传感器可以被下放至某个精确的地点，然后会返回它们和藏宝箱之间的距离，但是该距离存在正负 10%以内的误差。第一个传感器返回藏宝箱的距离为 450 米（也就是说，实际距离在 405 米和 495 米之间）。第二个传感器返回藏宝箱的距离为 350 米（实际距离在 315 米和 385 米之间）。由于客户不想租用你的船，他只告诉了你两个传感器的相对位置。即第一个传感器的位置为(0, 0)，第二个传感器的位置为(300, 400)。

热身问题

P³ 如果传感器测出的距离是准确的（没有正负 10%的误差），还可以再下放一个传感器，你要如何找出藏宝箱的具体位置？

热身问题解答

以(0, 0)为圆心画一个半径为 450 米的圆，以(300, 400)为圆心画一半径为 350 米的圆。这两个圆相交于两点，如图 32 所示。

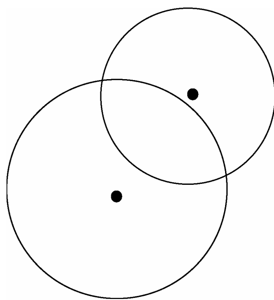


图 32　大圆的半径为 450 米，小圆的半径为 350 米。它们的圆心分别为(0, 0)和(300, 400)，根据勾股定理，两圆心相距 500 米

用代数方法找出两个相交点的坐标位置还是有点挑战性的。首先用如下两个方程式表示两个圆：

(1) $x^2 + y^2 = 450^2 = 202\,500$

(2) $(x-300)^2 + (y-400)^2 = 350^2 = 122\,500$

将上述两个方程式相减消去二次项，可得两圆公共弦的方程式如下：

$3x+4y=1650$

即 $y=-3x/4+412.5$

代入方程式(1)，得：

$x^2+(-3x/4+412.5)^2=x^2+9x^2/16-618.75x+17\,0156.2=202\,500$

解此一元二次方程，得 x 值，再代回公共弦方程式，即可得两交点坐标为：

(−46.75, 447.56)和(442.75, 80.44)

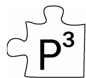
相比之下，几何学的方法（即使是画画草图）要好得多，一目了然：将第三个传感器放置在某个交点上。藏宝箱要么刚好在传感器所在的交点上，要么在另一个交点上。实际上，传感器距离其中一个交点要比另一个交点更近。

不过在不完美的现实世界中，传感器返回的距离是存在正负 10%的误差的。以下问题都是建立在这个假设之上的。

(1) 为确保得到藏宝箱位置的最精确估计，应该把第三个传感器放置在哪里？

(2) 假设客户可以再为你提供两个传感器（也就是第三个和第四个），但是它们需要被同时下放至海底。你能将宝藏的位置圈定在一个面积小于 5000 平方米的矩形内吗？如果是面积小于 2000 平方米的矩形呢？

(3) 假设你在前两个传感器下放海底之前就加入了寻宝行动，但你一共可以使用 3 个传感器，其中两个传感器非常准确（误差在一厘米之内），另外一个传感器的误差在 10%之内。假设你必须在(0, 0)和(300, 400)两个位置放置两个传感器，为了把宝藏的位置圈定在尽可能小的矩形区域内，你应以何种顺序下放这 3 个传感器，分别下放在哪些位置？



答案

1. 为确保得到藏宝箱位置的最精确估计，应该把第三个传感器放置在哪里？

根据可能的误差距离，为每个圆都增加一个内圈和一个外圈，如图 33 所示。

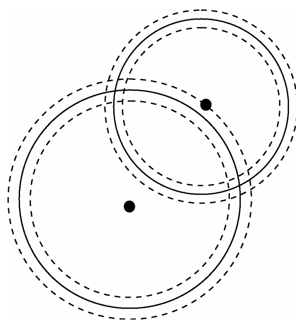


图 33　圆越大则不确定性越大，误差范围为 10%

还是像之前一样，如果你把传感器放置在相交两圆的某个交点上（比如说，就放在热身问题中用的那个交点上），那么藏宝箱要么在方圆 60 米之内，要么就在百米之外。这种情况下，藏宝箱实际上在另一个交点方圆 60 米范围之内。为什么是 60 米？因为 $60>\sqrt{\left(\left(35^2\right)+\left(45^2\right)\right)}$，且两圆的内圈和外圈在交点周围圈出的矩形区域面积约为 70 米乘以 90 米。然而，正如伊万・热赞卡建议的那样，如果我们能跳脱思维定式，便可以找到一个更好的解法。如果我们将第三个传感器放置在两圆交点(–46.75, 447.56)和 (442.75, 80.44)的连线上，比如说更靠近(–46.75, 447.56)，那么我们就可以确定宝藏所在的矩形区域，而且能获得更高的精确度。最好应该放在矩形内的哪个位置，我把这个问题留给你来思考。

2. 假设客户可以再为你提供两个传感器（也就是第三个和第四个），但是它们需要被同时下放至海底。你能将宝藏的位置圈定在一个面积小于 5000 平方米的矩形内吗？如果是面积小于 2000 平方米的矩形呢？

正如之前所述，前两个传感器将藏宝箱的位置圈定在两个长宽分别为 70 米和 90 米的矩形内。这两个矩形的中心为两圆的交点(–46.75, 447.56)和(442.75, 80.44)。你可能会想当然地认为，将两个传感器放在两个矩形的中心是个不错的主意。然而，如果仔细考察两个矩形，我们会发现，相比矩形中心，其实放在矩形的右半部分更好。例如，假设我们把传感器沿平行于矩形长边的中心线放置在中心靠右 30 米处，如图 34 所示。

如果传感器和藏宝箱的距离在 38.1 米之内，那么藏宝箱的位置将被圈定在一个面积小于 53.1 米乘以 70 米的子矩形之内，也就是整个矩形的右半部分加上左半部分的一小半，如图 35 所示。（为什么是 38.1 米？因为传感器距离矩形右上角及右下角 38.1 米。）

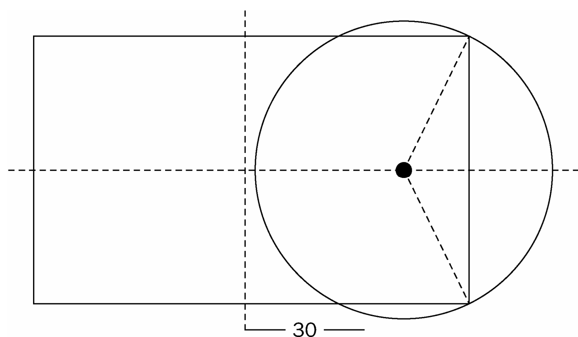


图 34　以两个交点为中心，两圆的误差内圈和外圈可近似围成两个相同的矩形。图中显示了其中一个矩形，将传感器放置在中心靠右 30 米处。这样一来，我们不但可以确定宝藏在哪个矩形区域中，还能大致获得它在矩形区域中的位置。例如，如果传感器的读数大于 42.3 米，那么藏宝箱将位于矩形中未被圆形完全覆盖的区域[①]

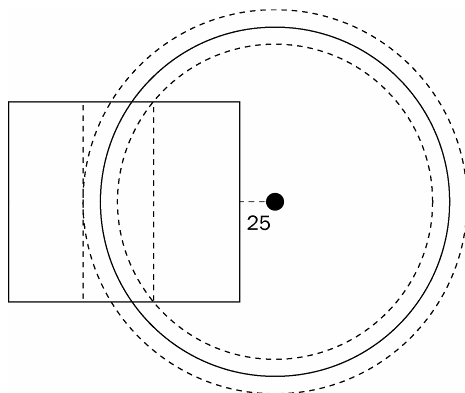


图 35　假定传感器返回的读数为 d，图上 3 个圆圈分别代表测量值所在的圈、测量值大于实际值的正误差圈（虚线）、测量值小于实际值的负误差圈（虚线）。宝藏一定位于由虚线标识的矩形内

考虑到存在 10%的误差，因此，即使传感器实际和宝藏的距离在 38.1 米之内，传感器仍可能返回 42.3 米（比实际多 4.2 米）。而且，当传感器返回 42.3 米时，实际距离可能比 42.3 还要多 4.2 米。因此，这就限制了宝藏精确位置在(15+42.3+4.2)米乘以 70 米的区域之内，小于 4310 平方米。如果传感器返回的读数大于 42.3 米，那么可以肯定宝藏将被限定在矩形中未被圆形完全覆盖的区域，估测面积小于 70 米乘以 60 米。

然而，第二个数字只是保守的估计。比方说，假如测量的距离是 50 米，那么水平方向上，藏宝箱可能介于传感器往左 28 米处和 55 米处之间，这样就构成了一个宽为(55−28)米、长为 70

① 原文为“矩形右边被圆形覆盖的区域”，有误。——译者注

米的矩形，将宝藏圈定在 1890 平方米范围内。

其实还有一个更好的解法。如图 35 所示，把传感器放置在距离 70 米乘以 90 米的矩形的右边界 25 米的地方（也就是，距离矩形中心 70 米），假设图中矩形的水平边为 90 米。无论传感器返回什么读数，宝藏的位置都将被圈定在一个和矩形相交的弧形之中。若传感器的测量值为 d，那么矩形最左边的点可至矩形右边界左方 d−25 处（且最左位置位于矩形的中心线上），最右可至圆弧与矩形上下边界的交点处，如图所示。因此，最右点有两个，分别在矩形上下边界上。它们的具体位置可以通过勾股定理求得。同时考虑到，当传感器的读数为 d 时，实际的距离可能在 0.9 d 至 1.1 d 之间，所以，我们采用 1.1 d 计算最左点，用 0.9 d 计算最右点。综上所述，当我们把传感器放置在图中所示位置时，宝藏的位置可以被限定在单个矩形区域内，该矩形面积将小于 1940 平方米。

3. 假设你在前两个传感器下放海底之前就加入了寻宝行动，但你一共可以使用 3 个传感器，其中两个传感器非常准确（误差在一厘米之内），另外一个传感器的误差在 10%之内。假设你必须在(0, 0)和(300, 400)两个位置放置两个传感器，为了把宝藏的位置圈定在尽可能小的矩形区域内，你应以何种顺序下放这 3 个传感器，分别下放在哪些位置？

这一问出奇地简单。将两个测量准确的传感器分别放置在(0, 0)和(300, 400)这两个位置。根据热身问题的讨论，这样一来，宝藏的可能位置将被限定在两块很小的区域内。随后，我们可以使用测量有误差的传感器来确定宝藏的具体位置。有悖常理的想法是，先使用测量有误差的传感器，再使用准确的传感器具体定位。这个问题还可以扩展，如果 3 个传感器的精确度各不相同，你该怎么制定寻宝计划呢？

7.5 数独

我第一次接触数独，是在火车上。当时，我 12 岁的孩子给我一本书，让我做上面最难的一道题。在行进的火车里解题让我有点不舒服，因此我决定把这道题交给程序来做。我花了 3 个小时编写了一个 100 行的程序，即便是网络上最难的数独，它也能在 2 秒钟内解出来。我不是在自吹自擂。迄今为止，我所知的最短的数独求解程序是由亚瑟・惠特尼（Arthur Whitney）编写的，他用的是自己开发的语言——q 语言，程序的长度是 103 个字符。虽然我不提倡程序越短越好，因为这往往以牺牲代码的可读性为代价，但是 103 个字符的数独求解程序着实让我惊叹不已。

数独是可应用排除法的谜题。在 9 × 9 的九宫格中，用 1 到 9 这 9 个数字填满整个格子。每个数字在每行、每列及每个小九宫格（从左上角开始的不重叠的 3 × 3 的 9 个方格）里正好只出现一次。

热身问题

考虑以下数独谜题：

								7
7		4				8	9	3
		6	8		2			
		7	5	2	8	6		
	8				6	7		1
9		3	4				8	
			7		4	9		
6				9				
4	5	9				1		8

用数字 0 代表此格还未被填写。

0	0	0	0	0	0	0	0	7
7	0	4	0	0	0	8	9	3
0	0	6	8	0	2	0	0	0
0	0	7	5	2	8	6	0	0
0	8	0	0	0	6	7	0	1
9	0	3	4	0	0	0	8	0
0	0	0	7	0	4	9	0	0
6	0	0	0	9	0	0	0	0
4	5	9	0	0	0	1	0	8

让我们先考虑左下角的小九宫格：

0	0	0						
7	0	4						
0	0	6						
0	0	7						
0	8	0						
9	0	3						
0	0	0	7	0	4	9	0	0
6	0	0	0	9	0	0	0	0
4	5	9	0	0	0	1	0	8

可以推断出，在左下角小九宫格中由 5 个 0 代表的空格中，肯定有两格分别为 7 和 8。但是倒数第 3 行已经有一个 7 了，因此小九宫格中的 7 肯定不在最上面那行。同时注意到，在第 3 列中也已经有一个 7 了，因此在小九宫格中，数字 7 唯一可能的位置是 6 右边的那一格，得：

0	0	0						
7	0	4						
0	0	6						
0	0	7						
0	8	0						
9	0	3						
0	0	0	7	0	4	9	0	0
6	**7**	0	0	9	0	0	0	0
4	5	9	0	0	0	1	0	8

同理可以推断出数字 7 在右下角的小九宫格中的位置只能是最后一行，在空格中填入 7，得：

0	0	0						
7	0	4						
0	0	6						
0	0	7						
0	8	0						
9	0	3						
0	0	0	7	0	4	9	0	0
6	7	0	0	9	0	0	0	0
4	5	9	0	0	0	1	**7**	8

我们可以先拿一个例子，手工演算一下，往往大致算法也就出来了。此题亦可如此。首先，检查每个填入 0 的空格的约束条件，得出该空格可以填入的数字。一旦找到一个空格存在唯一可选的数字，将该数字填入空格中，重新计算所有其他空格的约束条件。

让我们这样试试看，九宫格现在的状态是：

0	0	0	0	0	0	0	0	7
7	0	4	0	0	0	8	9	3
0	0	6	8	0	2	0	0	0
0	0	7	5	2	8	6	0	0
0	8	0	0	0	6	7	0	1
9	0	3	4	0	0	0	8	0
0	0	0	7	0	4	9	0	0
6	7	0	0	9	0	0	0	0
4	5	9	0	0	0	1	7	8

我们先考虑左上角的那个空格，跟它相关的所有格子如下图所示：

0	0	0	0	0	0	0	0	7
7	0	4						
0	0	6						
0								
0								
9								
0								
6								
4								

左上角空格内的数字可以是除 4、6、7 和 9 之外的所有 1 到 9 的数字，也就是说，可以是 1、2、3、5 或 8。这并没有缩小多大范围。我们继续考虑左上角小九宫格内的中心格：

0	0	0						
7	0	4	0	0	0	8	9	3
0	0	6						
	0							
	8							
	0							
	0							
	7							
	5							

这格的数字可以排除 3、4、5、6、7、8 和 9，因此只可能是 1 或 2。相比之前，这已经大大缩小了范围，但还是不够完美。

继续检查各个空格的可选值，看看是否能找到一个空格，可以填入的数字是唯一的。例如，考虑位于左中小九宫格内的左上角空格：

0								
7								
0								
0	0	7	5	2	8	6	0	0
0	8	0						
9	0	3						
0								
6								
4								

可以排除掉 2、3、4、5、6、7、8 和 9。因此，唯一可能的数字是 1，九宫格的状态为：

0	0	0	0	0	0	0	0	7
7	0	4	0	0	0	8	9	3
0	0	6	8	0	2	0	0	0
1	0	7	5	2	8	6	0	0
0	8	0	0	0	6	7	0	1
9	0	3	4	0	0	0	8	0
0	0	0	7	0	4	9	0	0
6	7	0	0	9	0	0	0	0
4	5	9	0	0	0	1	7	8

现在，让我们考虑 1 右边的那个空格，跟它相关的所有格子如下图所示：

	0							
	0							
	0							
1	0	7	5	2	8	6	0	0
0	8	0						
9	0	3						
	0							
	7							
	5							

P³ 这一格可以排除掉 1、2、3、5、6、7、8 和 9，这么一来，4 便是唯一的选择。（有的时候可以利用更多的相关格子。例如，在第一列中有一个 4，这说明 1 和 9 中间的那个空格便不可能是 4。但是千万不要在前行的火车上尝试这样的推理。）下面留给你了，试试看能不能解开这道数独，你会发现其实一点都不难。

热身问题解答

8	1	5	3	4	9	2	6	7
7	2	4	6	5	1	8	9	3
3	9	6	8	7	2	4	1	5
1	4	7	5	2	8	6	3	9
5	8	2	9	3	6	7	4	1
9	6	3	4	1	7	5	8	2
2	3	1	7	8	4	9	5	6
6	7	8	1	9	5	3	2	4
4	5	9	2	6	3	1	7	8

在热身问题的解答过程中，总是至少存在一个空格，可以根据约束条件排除到只剩下一个可能值。也就是说，我们并不需要作出“试探猜测”——给空格内赋一个（并非唯一）满足约束条件的值，然后一一验证。让我们试着来设计一个算法。

以下伪代码是针对不需要依靠试探猜测的数独的（`basicsud`）：

过程 `basicsud` 的执行流程如下。

第 1 行设置标志变量 `stillchanging` 初始值为真，此变量为真代表数独还可以继续填写。第 2 行至第 11 行为一个 `while` 循环，当 `stillchanging` 为假时循环结束。在此循环体内执行以下步骤：

(1) 首先将 `stillchanging` 设为假；

(2) 随后为数独中所有依然为 `0` 的单元格（为 `0` 表示还未被填写）找出它们的约束条件；

(3) 如果存在一单元格 `e`，根据约束条件存在唯一解 `v`，则将 `v` 填入 `e` 中，并设置 `stillchanging` 为真；

(4) 如果存在一单元格 `e`，根据约束条件没有可以填入的数字，则返回“不一致状态”。

所有具有唯一可能值的单元格都填满后，循环结束，第 12 行返回数独状态，过程结束。

这个算法不但可以用来应对简单的数独，对于解决更难的数独问题同样至关重要。较难的数独问题需要依靠试探猜测，并且需要检验给出的可能值是否符合各类约束。例如，如果某个空格所在的行和列已经包含了所有 1 到 9 的数字，就会出现“不一致的状态”。

需要试探猜测的求解过程是怎么样的呢？让我们跟着直觉走。假设我们从“一致的状态”开始。首先调用 `basicsud`，如果能够使数独达到“完成的状态”（每一个空格/0 都填入了相应数字），

那么问题便解决了。如果每个空格的可能值都在两个或两个以上，那么对于每个空格的每个可能的值，我们都系统地进行检验。也就是说，对于当前的每个空格，我们先保存现有的状态，尝试某一个可能的值。如果这个值将导致数独进入“不一致的状态”，我们便回退到之前的状态，然后尝试下一个可能值。

以下这段伪代码（specsud）使用了一个堆栈来保存各个状态。当需要作出猜测时，便将当前状态入栈保存。如果此次猜测不可行，便将栈顶状态出栈。

过程 specsud 的执行流程如下。

首先调用 basicsud。如果 basicsud 返回“不一致状态”，则说明该数独无解，过程结束。如果 basicsud 返回的数独 s′为已完成数独，则返回 s′，过程结束。第 6 行至第 18 行对应 s′为未完成数独的情况，主要逻辑为两层嵌套循环，其中第 9 行至 18 行为外层循环，用 R 代表数独 s′中未填写的有两个以上可能值的单元格集合，对于 R 中的每个单元格 e，执行内层循环。第 11 至 17 行为内层循环，遍历单元格 e 的所有可能值，对于每个可能值 v，执行以下步骤：

(1) 首先将数独现在的状态 s′放入堆栈中保存；

(2) 再将 v 填入数独，记数独状态为 s″；

(3) 递归调用 specsud，传入参数 s″，记返回数独状态为 s′′′；

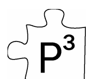
(4) 如果返回的 s′′′是一个完成的数独，将此状态 s′′′返回，过程结束；

(5) 状态 s′出栈。

这个算法几乎用任何语言都很容易实现，得出的代码的运行时间一般不会超过 1 秒。你可以试试看，用一台新款的个人电脑，能否在 3 秒之内解决下面这道数独。我之前提到过的 103 个字符的程序耗时不到 100 毫秒，但是这并不是一场比赛。真的，确实并非比赛。

(1) 求解下面这个数独。

0	3	0	0	0	0	0	4	0
0	1	0	0	9	7	0	5	0
0	0	2	5	0	8	6	0	0
0	0	3	0	0	0	8	0	0
9	0	0	0	0	4	3	0	0
0	0	7	6	0	0	0	0	4
0	0	9	8	0	5	4	0	0
0	7	0	0	0	0	0	2	0
0	5	0	0	7	1	0	8	0



答案

1. 求解下面这个数独。

这道数独有点难度，答案参见下图。根据之前给出的伪代码，我简单地编写了一段伪代码求解此题。回溯的次数非常少——低于 50 次。

8	3	5	1	2	6	7	4	9
4	1	6	3	9	7	2	5	8
7	9	2	5	4	8	6	3	1
6	4	3	9	1	2	8	7	5
9	8	1	7	5	4	3	6	2
5	2	7	6	8	3	1	9	4
2	6	9	8	3	5	4	1	7
1	7	8	4	6	9	5	2	3
3	5	4	2	7	1	9	8	6

顺便说一下，可能会有下面这样的数独的变体游戏，但是我还没找到类似的。我称之为数独对杀。这是一个两人对弈的游戏。假设我跟你一起玩，我们俩轮流在数独板上填入数字。如果你没有数字可填，那么我就赢了。所谓没有数字可填，一种可能是因为数独已经被填满了，还有一种可能是无论你填入什么数字，都会违反数独的约束。类似地，如果我无路可走，则你赢得比赛。

7.6　数字编码

基于一系列约束条件作出猜测，这是非常常见的解题思路，你或许想要换道题目再试一试。

此题中，将给出若干个含有 2 到 9 个字母的字母序列，每个字母序列代表了一组按升序排列的数字，例如 2、3、4 和 5。此题最简单的版本是，每个字母对应 1 到 9 之间的一个数字。你的任务就是找到符合条件的编码规则。

热身问题

P3 作为热身，我们先来考虑最简单的版本。给出下列字母序列，请找出每个字母所代表的数字。

```
GDF
IHEC
DFBIH
FBIHECA
HE
FBIH
IHE
FBIHEC
BIHE
EC
FB
```

热身问题解答

由于每个字母序列均代表一组升序排列的数字，而 FBIHEC 是 FBIHECA 的子序列，所以没有提供任何新的信息。总之，我们不需要考虑任何子序列。这样就只剩下 3 个序列要考虑：GDF、DFBIH 和 FBIHECA。将第 1 个和第 3 个通过 F 相连，即得 GDFBIHECA。因此，G=1，D=2……A=9。

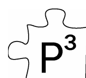
这只是一个热身，下面来考虑一下当一个字母代表两个数字的情况。

(1) 你能否找出每个字母所代表的（最多是）两个数字？

```
EDHFHI       CBEEHGDG     FEBGH
ACBEDHG      ACIFEHG      CBEEBF
HFD          CIFE         CIFD
EEBGH        BFDH         EEB
HGH          FDBFHI       ED
FEBF         BFEBGDI      FEBG
IEDBFDG      IEDH         CIEEH
ACBFEB       EHG
```

(2) 对于那些喜欢迎难而上的人，给出如下的字母序列，假设每个字母所代表的数字最多有 3 个，请问字母和数字的对应关系是什么？

```
ABBDH
AFCFAE
EBFG
ADCI
IHBID
DCIHEI
AFCFA
DCFGAB
FCIH
HAE
CFGAGF
EIDB
AEB
EBD
EGD
CIHBBI
AIF
HBID
EFCI
HABG
BIFG
FCHABI
ABID
CFHEB
DCHGEBF
ADCFAEG
IAAGIB
HBBDB
FCFGAII
FCHGBG
EIDG
ABBDB
GEI
AI
DCIAE
BIIB
BIDH
AABF
EDCIHE
CFABB
GDB
GIH
HGAG
FCI
DCHGBBDH
FGEGF
BIFH
```



答案

1. 你能否找出每个字母所代表的（最多是）两个数字？

以下是答案，每个字母所代表的最多是两个数字。

A 是 1；B 是 3 或 6；C 是 2；D 是 5 或 8；E 是 4 或 5；F 是 4 或 7；G 是 7 或 9；H 是 6 或 8；I 是 3 或 9。

2. 对于那些喜欢迎难而上的人，给出如下的字母序列，假设每个字母所代表的数字最多有 3 个，请问字母和数字的对应关系是什么？

以下是答案，每个字母所代表的数字最多有 3 个。

A 是 1、5 或 6；B 是 6、7 或 9；C 是 3；D 是 2 或 8；E 是 1 或 6；F 是 2、4 或 8；G 是 5、7 或 9；H 是 4、5 或 9；I 是 4、7 或 8。

7.7　选择性贪心

迄今为止，除去过载系统的任务调度以及前面几题中猜测试探的运用，最佳策略无一例外都是“跟着感觉走”，也就是我们熟知的“贪心算法”。

> 如果某一步可以降低开销/更接近目标，那就走下去；否则就避开它。

有些情况下，只需要一些小的改动，便可以继续沿用上述基本原则。

> 找到子问题的最低开销的解，然后将该解与最优子问题综合在一起。

欢迎进入动态规划的世界。这是一门有着广泛应用的技术。我们将从字符串编辑开始，但很快你就得设计菜单了。

字符串编辑问题是指，通过最少的编辑操作次数，将源字符串转换成目标字符串。一共有 3 种编辑操作：将一个字符替换成另一个字符（例如，将 a 替换成 b），插入一个字符（例如，用 c 字符替代空白）和删除一个字符（例如，用空白替代字符 c）。例如，将单词 rent 转换成语义相同的 let（如果你生活在英国，这两个单词都有“租用”之意），我们可以先将 r 替换成 l，再删去 n。反过来，将 let 转换成 rent，可以将 l 替换成 r，再插入 n，其他的字母不需要改变。无论是哪个方向的转换，编辑距离均为 2。

热身问题

当需要转换的字符串很短时，只要用眼看看很容易就能找到转换方法。考虑以下两个形如基因序列的字符串。

P3 要把'TAGATGGTCT'转换成'TGGAGACAGTCT'，需要几次编辑操作？你来试试看吧。

热身问题解答

为了更好地理解如何用动态规划解决此类问题，我们先考虑一个简单的字符串转换示例，'AGA' 转换成'TGGAG'。现在，你一定要仔细看一看图 36 所示的矩阵。

我们在矩阵的最上方依次写下'TGGAG'，在矩阵的最左端依次写下'AGA'。第 0 行的数字代表从空字符串转换到另一个空字符串、字符串'T'、字符串'TG'等所需要的插入操作次数，分别是 0 次、1 次、2 次，一直到 5 次。最左边的列对应的是从空字符串转换成空字符串（0 次）、从'A'转换成空字符串（1 次）等所需要的删除操作次数。这样我们就完成了动态规划矩阵的初始状态。

下面我们逐行来填充矩阵。记第 0 行第 0 列的位置为(0, 0)，对应左上角的单元格。第 i 行第 j 列的单元格代表'AGA'的第一个字母到第 i 个字母的子字符串和'TGGAG'的第一个字母到第 j 个字母的子字符串之间的编辑距离。当我们要计算单元格(i, j)的值时，单元格$(i-1, j)$（单元格(i, j)上方）、单元格$(i, j-1)$（单元格(i, j)左侧）和单元格$(i-1, j-1)$（单元格(i, j)左上对角项）的值

都已经计算完毕。我们将通过'AGA'的第 i 个字母和'TGGAG'的第 j 个字母以及上述 3 个相关单元格的值，来计算第 i 行第 j 列的单元格值。

		T	G	G	A	G
	0	1	2	3	4	5
A	1					
G	2					
A	3					

图 36　动态规划矩阵的初始状态。最上面一行（第 0 行）代表从一个空字符串开始，成为另一个空字符串、字符串'T'、字符串'TG'及字符串'TGG'等分别需要的插入操作次数。最左列（第 0 列）代表从一个空字符串、字符串'A'、字符串'AG'及字符串'AGA'转换成另一个空字符串，分别需要的删除操作次数

在以下计算公式中，如果'AGA'的第 i 个字母和'TGGAG'的第 j 个字母不同，则 `differs(i, j)` 为 1，否则 `differs(i, j)` 为 0。

```
entry(row i, column j) = min(entry(row i-1, column j) + 1,
  entry(row i, column j-1) + 1,
  entry(row i-1, column j-1) + differs(i,j))
```

如图 37 所示，我们以 T 所在的那一列，第一个 A 所在的那一行所对应的单元格为例。

		T	G	G	A	G
	0	1	2	3	4	5
A	1	1	→ 2	→ 3	3	→ 4
G						
A						

图 37　第一行计算完毕，代表了从字符串'A'转换到'TGGAG'各个子串的编辑操作次数。从箭头指向可以看出，若要从'A'转换成'TGGAG'，需要 4 次插入操作，分别是插入'TGG'和'G'

从箭头指向可以看出，第 1 行第 1 列的值来自其左上对角项，因为 0+differs(1, 1)=0+1=1，小于推导自左侧单元格的值（1+1=2）和上方单元格的值（1+1=2）。因此，从'A'到'T'编辑距离最短的转换方法是直接将'A'替换成'T'。经过左侧单元格的转换方法为：先删除'A'，再插入'T'，编辑距离为 2。经过上方单元格的转换方法为：先插入'T'，再删除'A'。第 2 行（A 所在的行）第 2 列（第一个 G 所在的列）单元格的值既可以来自左上对角项，也可以来自左侧。而我们在图 37 中用箭头画出的路径是经过左侧单元格的，表示"从 A 转换成 TG，要先将 A 替换成 T，再插入 G"，这条路线对应的编辑距离为 2。

现在我们来考虑第 1 行第 4 列（也就是 A 所在的那一列）。这时，代价最小的编辑路径经过左上对角项，编辑距离为 3。注意 differ(1, 4)=0，因为'AGA'的第一个字符和'TGGAG'的第四个字符都是'A'。箭头画出路径代表如下的操作序列：先插入'T'、'G'和'G'（3 次编辑操作），然后用'A'替换'A'（不需要编辑操作）。同样地，第 1 行最后一列的编辑距离为 4，只需在上述操作序列后再加上插入'G'字符的操作。关键在于，只要观察一个单元格的左侧、正上方及左上对角的三个单元格，就能对它进行填充。

现在，我们已经准备好来继续计算第 2 行了，详见图 38。请注意，第 2 行（'AGA'中 G 右边的那行）第 2 列（'TGGAG'中的第一个 G 所在的那列）单元格的值为 1，小于其左侧和正上方的单元格。此单元格代表的操作序列为：将'A'替换为'T'，将'G'替换为'G'①。该行最右单元格代表的编辑操作序列为：先插入'T'、'G'和'G'，再将'A'和'G'分别替换成'A'和'G'②。

		T	G	G	A	G
	0	1	2	3	4	5
A	1	1	2	3	3	4
G	2	2	1	2	3	3
A	3					

图 38　第 2 行计算完毕，并给出了部分最佳编辑路径，请注意箭头所指示的最佳路径并不是唯一的

现在，你应该已经了解了求解思路，可以填充完整个矩阵了吧，如图 39 所示。

右下角单元格对应的操作序列为：将'A'替换成'T'，插入'G'，将'G'替换成'G'，将'A'替换成'A'，再插入'G'。编辑距离为 3。上述编辑路径只是此问题的一个最优解，还有其他的最佳方案，例如：将'A'替换成'T'，将'G'替换成'G'，插入'G'，将'A'替换成'A'，再插入'G'。

①② 不需要编辑操作。——译者注

		T	G	G	A	G
	0	1	2	3	4	5
A	1	1	2	3	3	4
G	2	2	1	2	3	3
A	3	3	2	2	2	3

图 39　完整的热身问题的动态规划矩阵。最后，我们保持'GA'不变，然后对剩下的单元格进行相应的插入或替换操作

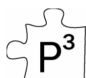
动态规划采用的也是一种贪心策略，首先找到子问题的最优解，解决子问题，然后找到问题的一个最优解。我们称之为选择性贪心策略，是因为动态规划在寻找问题的一个最优解之前，需要检查很多子问题，然后选择最优子结构求解总问题。这样的解题思路也很好地体现了学术研究的基本方法。

现在轮到你了。你需要将'TAGATGGTCT'转换为'TGGAGACAGTCT'。为便于你解题，图 40 中已经给出了矩阵的轮廓。

	T	G	G	A	G	A	C	A	G	T	C	T
T												
A												
G												
A												
T												
G												
G												
T												
C												
T												

图 40　请完成该矩阵来解决问题

(1) 试试看你能否通过计算图中所示的矩阵，找到这两个字符串的编辑距离。计算时，请统计一下有多少种不同的转换方法。



答案

试试看你能否通过计算图中所示的矩阵，找到这两个字符串的编辑距离。计算时，请统计一下有多少种不同的转换方法。

如图 41 所示，编辑操作序列如下：将'T'替换成'T'，插入'G'，插入'G'，将'A'替换成'A'，将'G'替换成'G'，将'A'替换成'A'，将'T'替换成'C'，将'G'替换成'A'，将'GTCT'替换成'GTCT'。这条路径的编辑距离为 4。

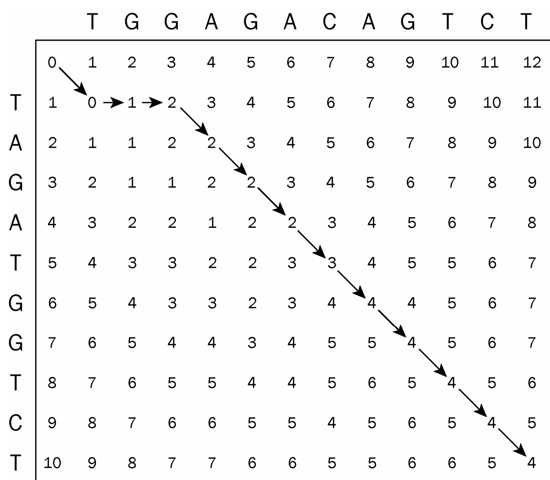


图 41　这是一个从'TAGATGGTCT'转换至'TGGAGACAGTCT'的最佳编辑操作序列。从第一个字母开始，其中涉及了很多替换操作。箭头总是指向右侧、正下方或者右下方

7.8　最优包装

让某个美味甜甜圈专卖店引以为傲的是，他们能够为顾客供应数量在 1 到 160 之间的甜甜圈。比方说，有个顾客径直来到柜台前说“我要 43 个甜甜圈”，店家随即就准备好了足够数量的甜甜圈。

热身问题

这家美食店想要为他们的甜甜圈设计 4 种不同份额的包装。你的任务就是确定这 4 种份额分别是多少，使得接到一般的订单时，店家使用的袋子尽可能少。对于新手来说，我们先假设 1 到 160 之间每个数量出现的可能性都是相同的。

比如说，假设 4 种包装的容量分别为 1、5、10 和 20 个甜甜圈。如果某个顾客点了 48 个甜甜圈，那么需要 6 个袋子：2 袋 20 个、1 袋 5 个和 3 袋 1 个。

我推荐的解题思路是，枚举 4 种袋装量的所有可能组合，然后找出最优方案。其实稍作思考，我们便可以提高解题速度。首先，必然存在一种包装里面只有 1 个甜甜圈，所以其实只要枚举 2 到 160 之间的所有升序的三元组即可。评估每个三元组时，将 1 个甜甜圈的包装也考虑进去，然后计算平均开销，最后找到最佳方案。

该过程的内循环用于计算平均开销。也就是说，给定一个 4 种包装的组合，计算每个订单所需要的平均袋子数量。动态规划非常适用于内循环的计算，你可以试试看。

热身问题解答

以下是包含了高级别的伪代码，采用动态规划方法。

目标：给定 1、*s*1、*s*2 和 *s*3 四种包装量，计算每个订单需要的袋子数量。

(1) 创建包含 160 个元素的数组，即各个订单所需的袋子数量的数组。

(2) 初始化数组中的每个元素，位置为 1、*s*1、*s*2、*s*3 的元素将被初始化为 1，代表这些数量的订单只需要 1 个袋子即可，其他元素均被初始化为无穷大。

```
for entry i = 2 to 160
  if cost(i) == infinite
     for entry j from 1 to i-1
       if (cost(j) + cost(i-j)) < cost(i)
            cost(i) := (cost(j) + cost(i-j))
       end if
     end for
  end if
end for
```

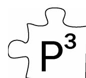
(3) 将需要的所有袋子量相加除以 160，即得到平均开销。

这个算法的运行时间大致正比于甜甜圈最大数量的二次方，这已经足够快了。如果不用动态规划的话，整个求解过程会复杂很多。

既然你已经知道如何评估给出的包装组合，现在剩下的就是枚举所有可能的包装组合（也就是枚举 2 到 160 的三元组），找出最佳方案。

(1) 假设任何数量的甜甜圈订单都是等概率出现的，应该如何设计 4 种包装，使得订单所需的平均袋子数量最少？最少是多少？

(2) 假设甜甜圈数量在 1 到 50 之间的订单是等概率出现的，且出现概率是甜甜圈数量多于 50 的订单的 5 倍。打个比方，也就是说，14 个甜甜圈的订单的出现概率是 53 个甜甜圈的订单的 5 倍，但却和 47 个甜甜圈的订单的相同。在这个新的设定下，要如何设计 4 种包装，使得订单所需的平均袋子数量最少？最少的数量是多少？



答案

1. 假设任何数量的甜甜圈订单都是等概率出现的，应该如何设计 4 种包装，使得订单所需的平均袋子数量最少？最少是多少？

动态规划解决的只是内循环的计算。外循环负责生成三元组，然后对其进行评估。总共有 4 019 679 个三元组，其中升序的只有 657 359 个。对于每个三元组，我们计算订单所需的平均袋子数量，最终找到平均开销最小的那个三元组。诚然，这不是一个开销很小的程序，但是顶多也就花个几分钟而已。我找到的最好的 4 种包装组合是 1、6、29 和 37，每个订单所需的平均袋子数量为 4.7 个。

2. 假设甜甜圈数量在 1 到 50 之间的订单是等概率出现的，且出现概率是甜甜圈数量多于 50 的订单的 5 倍。打个比方，也就是说，14 个甜甜圈的订单的出现概率是 53 个甜甜圈的订单的 5 倍，但却和 47 个甜甜圈的订单的相同。在这个新的设定下，要如何设计 4 种包装，使得订单所需的平均袋子数量最少？最少的数量是多少？

在这个设定下，还是可以采用动态规划计算每个订单的开销，但要在一定程度上改变平均开销的函数，以反映出各个订单在概率上的变化。我的做法是，计算所有订单的总开销时，将数量为 1 到 50 的订单开销均乘以 5，然后在计算最优平均值时，将总开销除以 360（160+4 × 50）。除此之外，算法不需要任何修改。在这个新设定下，最优的包装方案为 1、5、12 和 32，订单所需的平均袋子数量（已经通过概率加权）为 4 个以下。

7.9　重温旅行推销员问题

旅行推销员问题（Traveling Salesman Problem），简称为 TSP，是很多问题解决方案的核心所在。它有很多变体，例如卡车送货优化问题、旅行驿站安排问题及电线铺设问题。旅行推销员问题非常适合用启发式算法解决，还有一些完美的理论也可用来解决这个问题。

在该问题中，一名推销员，我们暂且称他为鲍勃（Bob），以 C 城市为起点，开车访问多个城市，最后再回到 C，要求他至少访问每个城市一次。（有种半真半假的说法：制药公司要选什么样的人才当推销员，医生才容易买账呢？曾当过啦啦队长的人。）城市之间的旅行次数和费用各不相同，我们假设旅行费用总是正数，且满足对称性和三角不等式。对称性是指从城市 X 到城市 Y 的费用和从城市 Y 到城市 X 的费用相同。三角不等式是指从城市 X 经由城市 Y 到城市 Z 不可能比从城市 X 直接到城市 Z 便宜（费用可以相同，但不会更便宜）。

我们的问题是鲍勃能否用给定的经费或者更少的费用访问完所有的城市。正如你所知，如果有人给出了一个解决方案，你要验证所用开销是否超出给定经费是易如反掌的，但是要找出一个低于给定经费的方案却非常困难——这可能需要检查所有可能的访问路径。

很多人听到这个问题，第一个想法便是："为什么不能用贪心策略呢？也就是每次都选择最近的城市。"

P³ 使用贪心策略的话，结果会有多糟糕？你能否找到一个反例，使用贪心策略并不能找到费用最低的访问路径（暂时假设城市之间旅行的费用和城市的距离成正比）？图 42 展示了城市的布局。

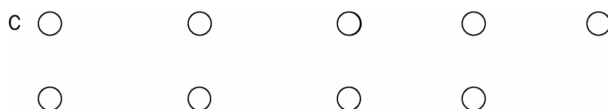


图 42　推销员以城市 C 为起点，最后又回到城市 C。每次他都选择最近的未访问过的城市为下一个目标。鲍伯能否合理安排其路线

使用贪心启发算法，你的路线将如图 43 所示，以 C 为起点，先往下走，再往右走，然后往上，继续往右，往下，往右，往上，往右，往下，最后回到 C。而实际上，最好的访问路线是从 C 点开始一直往右走，一直走到右上角位置，然后往下，接着一路往左回到 C 点，如图 44 所示。

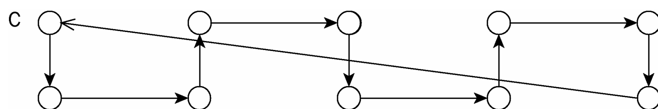


图 43　如果鲍勃每次都选择访问最近的未访问过的城市，会怎么样

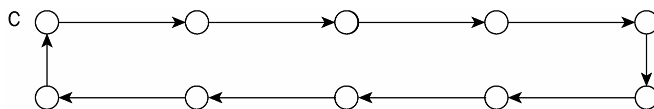


图 44　一条更优的访问路线

当贪心策略不再管用时，启发式算法可能会有用，但是先要解决一个问题，那就是贪心策略到底会有多糟糕呢？具体来讲，我们还是假设城市之间旅行的费用和城市的距离成正比，你能不能找到一种情况，当采用“每次选择最近的城市”这一贪心策略时，访问路线的开销将是实际最优开销的 2 倍还多？

我不准备立即回答这个问题，因为我将要给出另一种经过启发式算法改良的贪心策略，使用这一策略选取的路线，它的开销肯定不可能是最优方案的 2 倍以上，而且它适用于所有的城市集合。

正如你所知，所谓“生成树”是指一个不存在回路且所有顶点之间（在此例中，顶点即代表城市）均有路径相连的图。生成树的开销是指其所有边的开销的总和（还记得我们之前假设过从 A 到 B 的开销和从 B 到 A 的开销相同吧——对称性）。所谓最小开销生成树是指总开销最小的生成树。我们使用如下算法生成以 C 为起点的最小生成树：

```
如果一条边把树中的顶点和树外的顶点连接起来，则称这条边“有用”
  初始化树 T，使其包含城市 C，但不包含任何边
  until 没有任何城市可以加进来
    如果 E 有用，则把 E 加入 T 的边
      且对于任何其他的有用边 E'，E'的开销大于等于 E 的开销
    如果结点 E 不在 T 中，则把它加入 T 中
  end until
```

根据图 45 所示的顶点，图 46 展示了一棵最小生成树（再次强调，连接两顶点的边的开销和它的长度成正比）。

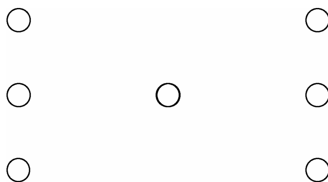


图 45　一系列城市。假设城市之间的旅行开销和距离成正比。目标是构建一棵最小生成树

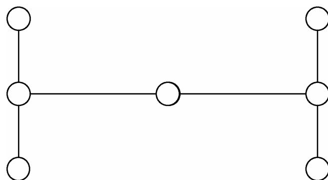


图 46　基于图 45 构建的最小生成树。请注意，其实我们不必知道哪个是起始城市

以下便是解题的关键。如果去掉推销员最后回到起点的那条边，推销员访问所有城市且花费最小的路线一定是一棵生成树（但并不一定是最小生成树）。这是因为由于三角不等性，回访一个城市是不划算的，所以最优旅行推销员路线一定是恰好访问每个城市一次的。既然最优旅行推销员路线是一棵生成树（加一条额外的边），那么最优方案的开销至少也得和最小生成树的开销持平。

因此，我们可以得出结论，最优旅行推销员路线的下限便是最小生成树的开销，即便这样的最优方案可能根本不存在。

但是，我们还没有大功告成呢。虽然推销员的访问路线是一棵生成树，但是大部分最小生成树并不能构成一条访问路线。还好，可以确定的是，我们总是可以利用最小生成树来生成一条访问路线，其开销不大于最小生成树开销的两倍，如图 47 所示。

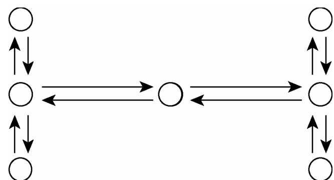


图 47　利用最小生成树生成路线，树中的每条边都来回走两遍。这样一来，无论起点是哪个城市，都能得到一条访问路线。诚然，这条路线需要回访城市，所以它是可以被改进的。但是必须承认，这条路线的开销一定不会大于最优方案的两倍

假设我们以中心点为起点，然后往右走，接着往上，往下，再往下，然后往上，往左回到中心。左半部分也是同理。这样生成的路线，每条边都将被访问两次。根据对称性，可以得出这条路线的开销是最小生成树的两倍。已知最小生成树的开销小于最优方案（具体未知），因此这条路线的开销也一定小于最优方案的两倍。

这条路线还可以有很多改进。图 48 展示了一种改进方法，将返回中心点的路线换成对角线。除去这些试探性改进，也有一些系统可确保的优化方法。其中，N.克里斯托菲迪斯（N. Christofides）给出了一种非常精妙的算法，将最小生成树子图的最小权（每条边的开销就是权值）匹配加到最小生成树中，可以生成一条路线，其开销保证不会大于最优方案的 3/2。

这些方法虽然巧妙，但不一定能够广而用之，因为它们严重依赖对称性和三角不等式。确实是这样吗？

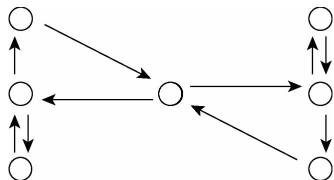
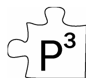


图 48　一些简单的基于最小生成树路线的试探性改进，它们要么还是维持原开销不变，要么减少了原开销（假设满足三角不等式）

(1) 如果去掉对称性和三角不等式的假设，你能否找到一个例子，使得 2 倍最优解的上限都不一定能确保满足？如果不能，你能否证明在这种情况下，利用最小生成树还是能够找到最坏是 2 倍最优解的路线？



答案

1. 如果去掉对称性和三角不等式的假设，你能否找到一个例子，使得 2 倍最优解的上限都不一定能确保满足？如果不能，你能否证明在这种情况下，利用最小生成树还是能够找到最坏是 2 倍最优解的路线？

当对称性和三角不等式不再满足时，基于生成树的启发式算法可能会表现得很糟糕，如图 49 所示。

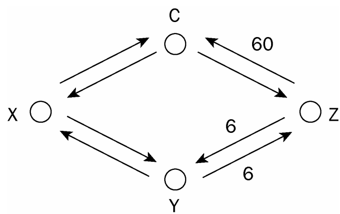


图 49　所有未标记的边的开销均为 5。标记的边 Z 到 C 的开销为 60（这违反了对称性和三角不等式）。标记的边 Z 到 Y 的开销为 6，Y 到 Z 的开销也为 6

假设除去图中标记数字的 3 条边以外，其余每条边的开销均为 5。图 50 展示了一条基于根结点为 C 的最小生成树的访问路线，因为这是构建阶段从 C 点出发的开销最小的生成树，它的开销为 85。相比之下，图 51 展示的访问路线的开销却只有 21。

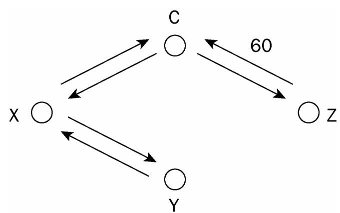


图 50　以 C 为根节点的最小生成树包含了 3 条有向边，CZ，CX 和 XY[①]，且这些边的反向边并不包括在内。不过当我们基于此生成访问路线时，必须要将那些反向边计算在内，其中有一条的开销高达 60。这么一来，总共的开销便达到了 85

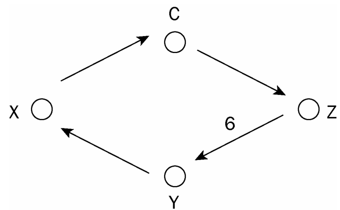


图 51　一个开销更小的路线，按顺时针方向访问各个顶点，总开销只有 21

① 原文为 CY，有误。——译者注

7.10　超载系统的任务调度与冻结晶体

每次遇到一个新问题时，首先试试纯粹的贪心算法（寻求降低开销的作法）。如果不管用或者进到了一个死胡同里，再试试枚举分析，就像之前数独的解题方法一样。但是，如果可能的情况太多，就试试动态规划。如果所有这些都不适用，那就要先估算最优解的范围，然后采用启发式搜索技术寻找近似最优解。

所谓启发式算法是指，它不能保证万试万灵，但大部分情况下（你所希望的）都很管用。当然，贪心策略就是一种很伟大的启发式算法，但是它却相当脆弱，正如我们在 7.3 节中所见。

这种探索性的启发式算法的核心原则是，有时会作出违背贪心策略的选择。这样做是为了扩大搜索空间。如果求解问题的每个状态都可以被编码成对应的标量（图 52 中的水平轴），那么图中的波浪线即代表了每个状态对应的开销。

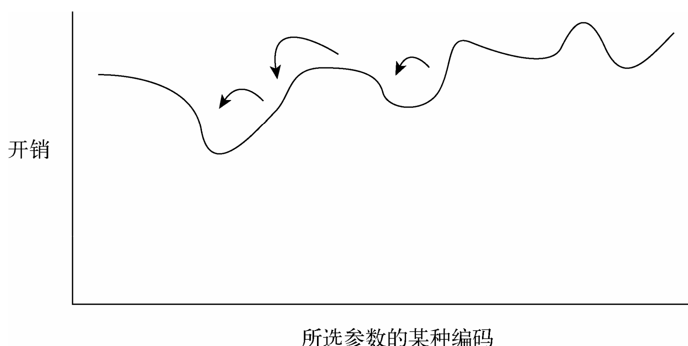


图 52　水平轴代表搜索空间，垂直轴代表问题开销。给定搜索空间中的一点，在贪心策略指导下，每一步都将以降低开销为目的，因此箭头总是由高开销指向低开销

在贪心策略指导下，开销只会逐渐降低。而探索性的启发式算法有时则会尝试作出违背贪心策略的选择，将问题推至开销更高的状态，达到跳出局部最优解的目的（如图 53 所示）。这样的过程是不是让你回想起了高中化学中活化能的概念？你的直觉是对的。

贪心策略的每一步都将以降低开销为目的，但我们不能总是朝着一个目标一走到底。先来看看动物界的类比——苍蝇与蜜蜂。为了从房子里离开，苍蝇一开始可能会撞到某扇关着的窗户很多次，但最后它总会飞离那扇窗户，找到一扇开着的窗飞出去，而蜜蜂则会不断地重复撞击玻璃试图找到出路。其实苍蝇就是作出了违反贪心策略的选择，离开了那扇玻璃窗，跳出了局部最优状态，而蜜蜂则坚持想要穿过那扇玻璃窗。[①]另一方面，苍蝇却从来都筑造不出如蜂窝般精美绝

① 据此我们或许可以推断出，最重大的科学成果之所以都是由年轻的科学家发现的，是因为他们的研究方式像苍蝇一样，敢于创新，不墨守陈规。而年长的科学家，则像蜜蜂一样，每一步都力求最佳，希望依靠丰富的经验达到最优目标。年长的科学家若想保持优势，还得多放眼四周。

伦的结构。我从中获得的启示是，当面对一个技术问题时，必须要在蜜蜂和苍蝇所采取的策略之间进行转换。有的时候，你必须要停止探索，开始脚踏实地苦干，但一旦碰到障碍，必须要重新开始探索。

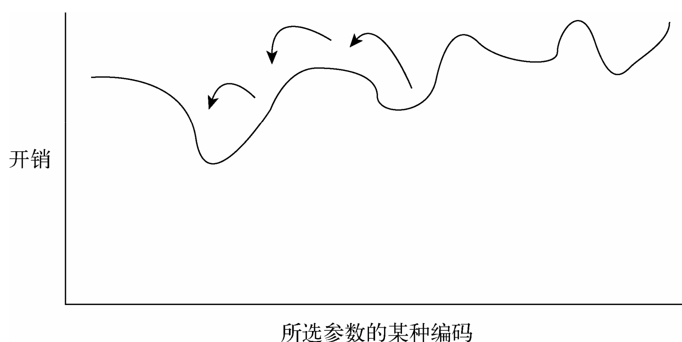


图 53　使用模拟退火等其他启发式搜索技术时，有时候会作出增加开销的选择。你可以看到图中最右边的箭头是从低开销状态指向高开销状态的。这么做是为了跳出局部开销极小值

主要的启发式搜索技术有遗传算法（也叫进化算法）、禁忌搜索、整数规划和模拟退火。在《如何求解问题：现代启发式方法》（*How to Solve It：Modern Heuristics*，Springer，2004）一书中，作者米凯利维茨（Zbigniew Michalewicz[①]）和大卫・B. 福格尔（David B. Fogel）从学术角度生动地介绍了上述启发式技术。

在这几种启发式技术中，每个人都有自己的偏爱。我最常用的是模拟退火，因为相比遗传算法，它的参数更少；相比整数规划，它的应用范围更广。其实我应该注意到，其他技术也有各自的优点。例如，如果一个问题涉及大量的数字，整数规划的线性规划近似解有时候会非常有效，还能避免数值上的不准确。有些人能够非常有效地应用遗传算法，我觉得这可以算是我的一个性格瑕疵，我就是没办法调对遗传算法的参数。

模拟退火算法符合我对世界运行之道的直觉认识。我第一次接触这个技术是在 1983 年的一次讲座上，演讲者柯克帕特里克（Kirkpatrick）正是模拟退火算法的主要发明者。他讲到自己之所以产生这个念头，是为了解决一道和旅行推销员问题类似的难题——如何最大限度地缩短电路板周围的线路（我认为就是电线）长度。这个问题是 NP 完全问题，但是公司（IBM）还是需要解决方案。柯克帕特里克是一个固态物理学家，因此他提出了一种受晶体冷却过程启发的算法。

如果你将液态硅迅速冻结，并不能形成晶体（因为晶体是能量最低的状态），只能形成一种无定形的（能量高一些的）斑块。但如果你将液态硅缓慢地冷却（所谓的“退火”），就能形成完美的晶体。缓慢的冷却过程使得内能可以达到最优状态。在高温时，内部粒子快速运动，使其远

① 原文为 Zvigniew Michalewicz，有误。——译者注

远脱离局部能量最优态，飞速离开，到很远的地方。当温度降低时，内部粒子渐趋有序。

柯克帕特里克指出，算法也可以解决同样的问题。在状态空间内搜索最优解时，每一步都是通过一次对线路中某个随机四元组的替换来达到新状态，例如，将线路中从 A 经由 B 和 C 到达 D 的那段，替换成从 A 经由 C 和 B 到达 D。在以下两种条件下，替换可以成立。

- 这次替换将获得一条更短的线路。
- 这次替换将获得一条更长的线路，但只有抛出一些伪随机骰子，才会给出一些不太确定的配置。但只有在一定概率下，这样的替换是可以接受的。

可见，上述第二步就是违反贪心策略的，但是它的发生是有一定的概率的。柯氏算法的关键就是这个概率的设定，它将取决于线路长度增长的幅度和算法运行的时间。这个概率在算法刚开始时会被定得很高（可能接近 1），但是随着算法的运行，将逐渐降低。在结束之际，算法几乎不再作出违反贪心策略的选择。用退火的术语来表达，那就是随着算法的运行，温度逐渐降低，违反贪心策略的概率也将不断减小。以下是伪代码。

```
取一个初始路径 r1
  初始化温度 T 为一个较高值
  loop until T 足够低
      或者你找到一个接近最优的答案
    考虑一个随机选择的可能变化
            产生一个路径 r2
    if 路径 r2 开销低于 r1
      then 用 r2 替换 r1
      else 以概率 exp((cost(r1)-cost(r2))/T)用 r2 替换 r1
    end if
    降低温度 T
  end loop
```

注意，对于违反贪心策略的替换，指数总是负数，因此概率在 0 到 1 之间。温度越高，指数越接近 0，概率就越高。同时，如果替换产生的长度增长越大，负的指数就越小，概率就越小。因此，违反贪心策略的替换一般会在算法运行初期和线路长度小幅增长的情况下发生。

并且，柯克帕特里克注意到，这个算法并不只适用于线路布局，可以推而广之，我想你从伪代码里也应该看出这点了。这个算法所需的参数只有初始温度、温度下降的速率以及开销函数。

当时，我立即就被这个优雅的算法吸引住了，可也有人持有异见。有个教授的提问非常尖锐："你证明了什么吗？""什么也没有，"柯克帕特里克流露出物理学家在面对烦人的数学家时的不耐烦，"在一定条件下，可以证明如果冻结过程无限缓慢，你就会得到一块晶体，但是这对算法来说意味着什么，可就说不准了。"

他们俩的这段交流很好地体现了启发式技术学家和算法学家之间的文化分歧。当面对的是 NP 困难问题时，运用启发式算法求解至少貌似合理。但对算法学家来说，任何算法都需要有时间保证。这两种观点都有一定的道理，但是自 NP 完全问题在 20 世纪 70 年代被提出以来，还没有任何有效的常规算法，或许在相当长的一段时间内，我们都需要依靠启发式算法来求解很多问题。

但是，启发式搜索技术不能保证找到最优解。如图 54 所示，如果最优解位于唯一的谷底，周围都是开销较高的山坡，那么即使利用模拟退火算法，也很难在这样的搜索空间内找到最优解。

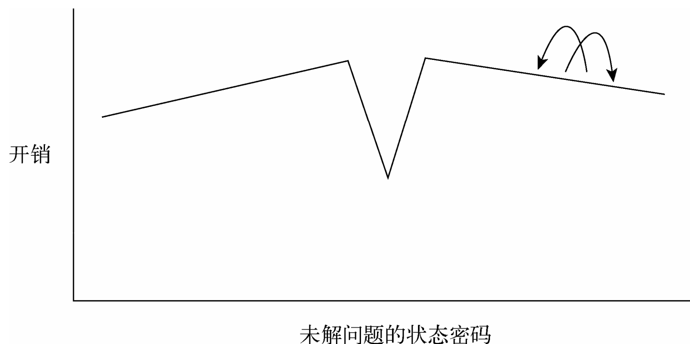


图 54　利用模拟退火算法在这个搜索空间内寻找最优解会比较棘手。由于最优解位于搜索空间中非常特殊的位置，将很难被找到

现在我想请你试一下用模拟退火算法解决一个超载系统的调度问题。你需要为一堆任务安排执行顺序，每个任务都有截止时间、一定的工作量和一个正数任务值。只有当任务在截止时间之前完成时，才能获得该任务的全部任务值，否则，什么都得不到。并且，你所面临的这些任务已经超出了你能完成的范围。

任务 T1 需要 3 天完成，截止时间是第 19 天，任务值为 17。
任务 T2 需要 4 天完成，截止时间是第 23 天，任务值为 14。
任务 T3 需要 6 天完成，截止时间是第 51 天，任务值为 10。
任务 T4 需要 3 天完成，截止时间是第 30 天，任务值为 7。
任务 T5 需要 7 天完成，截止时间是第 38 天，任务值为 13。
任务 T6 需要 6 天完成，截止时间是第 36 天，任务值为 11。
任务 T7 需要 7 天完成，截止时间是第 45 天，任务值为 18。
任务 T8 需要 3 天完成，截止时间是第 16 天，任务值为 10。
任务 T9 需要 5 天完成，截止时间是第 22 天，任务值为 13。
任务 T10 需要 2 天完成，截止时间是第 13 天，任务值为 16。
任务 T11 需要 8 天完成，截止时间是第 12 天，任务值为 6。
任务 T12 需要 1 天完成，截止时间是第 31 天，任务值为 15。
任务 T13 需要 5 天完成，截止时间是第 17 天，任务值为 13。
任务 T14 需要 2 天完成，截止时间是第 2 天，任务值为 13。
任务 T15 需要 7 天完成，截止时间是第 30 天，任务值为 11。
任务 T16 需要 5 天完成，截止时间是第 11 天，任务值为 18。
任务 T17 需要 4 天完成，截止时间是第 4 天，任务值为 10。
任务 T18 需要 5 天完成，截止时间是第 27 天，任务值为 15。

任务 T19 需要 4 天完成，截止时间是第 6 天，任务值为 15。

(1) 你最终可以获得的总任务值是多少？

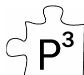
在准备用模拟退火算法（或其他的启发式算法）求解之前，先确定一个总任务值的上限。最简单的上限莫过于所有任务值的总和，但是这样的上限太遥不可及了，所以我们换一个计算方法。定义任务的价值密度等于任务值除以任务所需天数。例如，任务 T18 的价值密度为 15/5=3。现在，先找出最晚的截止时间（在这个例子里是第 51 天），然后将所有任务按照价值密度降序排序。

```
T12: 15
T10: 8
T14: 6.5
T1: 5.666667
T19: 3.75
T16: 3.6
T2: 3.5
T8: 3.333333
T18: 3
T9: 2.6
T13: 2.6
T7: 2.571429
T17: 2.5
T4: 2.333333
T5: 1.857143
T6: 1.833333
T3: 1.666667
T15: 1.571429
T11: 0.75
```

要计算任务值上限，请注意其计算时间，并观察有多少个从具有最高价值密度开始的任务能够在第 51 天之前完成。如果还有剩余时间，将下一任务的价值密度乘以剩余时间得出部分任务值。

在此例中，根据价值密度排序，T17 和它之前的任务都可以在 50 天内完成。因此，上限是 T12、 T10、T14、T1、T19、T16、T2、T8、T18、T9、T13、T7 和 T17 这 13 个任务的任务值总和 187，再加上 T4 的价值密度乘以剩余的 1 天（2.3），也就是 189.3。这个上限其实也非常宽松，因为我们计算的前提是假设所有任务的截止时间都是第 51 天。尽管如此，它可能还是有点用处的。

并且，对于模拟退火算法来说，我们给出的这个价值密度排序的任务列表应该会是一个不错的配置起点。好了，提示已经够多的了，大家来自己试试吧。



答案

1. 你最终可以获得的总任务值是多少？

我们遵循优先执行价值密度（任务值/执行时间）最大的任务这一启发式算法，得到如下执行顺序：T14、T19、T16、T10、T8、T1、T2、T15、T12、T5、T7 和 T3。这些任务的任务值分别为 13、15、18、16、10、17、14、11、15、13、18 和 10，总和为 170。这已经相当接近我们计算出来的上限 189.3[①]了。看看你编写的模拟退火算法是不是能找到更好的解法。

① 原文为 183，有误。——译者注

7.11　单词接龙

现实世界中的旅行推销员问题通常会引入一些考虑因素，所以相对要复杂很多。例如，很容易想象，在现实生活中，价格因素必须与推销员的士气、潜在客户群和市场条件实现平衡。即使开销函数很简单，我们也不能保证它能满足对称性和三角不等式。

两点解题要领仍旧不变。

(1) 需要估算一个上限或下限（也就是，估算一个可想象的最优解），有了最优解约束，就能知道在求解过程中是否还值得做更多改进。

(2) 启发式问题求解技巧。

我们以这个"单词接龙"问题作为例子。此题和旅行推销员问题很像，但是需要重新进行分析。

所谓单词接龙，是指给定一组单词，找出一个字符串，使其包含单词组中所有的词语。最优解便是找出满足上述要求的最短字符串。例如，给定单词 super 和 perfect，则 superfect 和 perfectsuper 均为可行的接龙方式，相比之下 superfect 更佳，因为它的长度更短。你的目标是找出给定单词组的最优（最短）接龙，当然也可以重新安排单词的顺序。

以下是给定的单词。

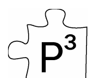
```
subway
dentist
wayward
highway
terrible
english
less
blessed
warden
rib
stash
shunt
hunter
```

单词接龙和旅行推销员问题又有什么关系呢？首先看看每对单词的边，例如，"warden" → "english"。我们定义每条边的开销为：将源单词和目标单词（本例中为 english）按此顺序相接形成接龙时，所需的目标单词中的字母数，即接龙长度减去源单词长度。对于此例，源单词和目标单词按顺序相接形成的接龙为"wardenglish"，因此，这条边的开销为 5 个字母，即"glish"。另外，请注意，如果将单词顺序反一下，那么"english" → "warden"的边的开销为 6（即"warden"的长度）。因此，此题不满足对称性（但是三角不等式还是成立的）。

应该如何设定最优接龙的长度下限？在继续往下读之前，你可以先停下来想一想。

我会这么计算：对每个单词，计算所有以它为目标单词的边的开销，然后累加每个单词的最小开销。例如，考虑单词“shunt”，指向“shunt”的所有边中开销最小的来自单词“stash”，“stash”→“shunt”的开销为 3。将 3 与“shunt”结合起来。现在将所有单词的相关开销累加，求得最优接龙长度的近似下限。（这只是一个近似值，因为很有可能在一个只接了部分单词的接龙中，会包含一个还没有被接的单词。例如，考虑以下 4 个单词，“shunt”、“stash”、“till”和“until”，前 3 个单词的接龙“stashuntill”已经包含了“until”，而在这 3 个单词指向“until”的边中，即使是开销最低的边开销也达到了 2。）

(1) 对于给定的单词组，你能找到的和近似最优解最接近的接龙是什么？



答案

1. 对于给定的单词组，你能找到的和近似最优解最接近的接龙是什么？

根据每个单词的最小开销边，将单词组织成如下顺序。看看这个接龙的长度和近似最优解非常接近。

```
subway
wayward
warden
english
shunt
hunter
terrible
rib
blessed
less
dentist
stash
highway
```

对应的单词接龙为：

subwaywardenglishunterriblessedentistashighway。

7.12　同盟最大化

对于计算问题，找到一个 2 倍于最优解的近似算法貌似并非难事。跟旅行推销员问题一样，这道题也跟道路设置相关，但是带有较强的排外性的设定。

给定一组城市，城市之间有道路相连。从任一城市出发，都可以旅行到任何其他城市，但可能不是直达的，需要经过其他中转城市。两个城市之间的旅行路线也不一定是唯一的，也就是说，这些道路不一定要构成一棵生成树。并且，所有的路都是双向的。

如果两个城市之间有道路直接相连，我们称这两个城市是相邻的。只有相邻的城市才会结成同盟，而且每个城市至多只会结交一个同盟。如果城市 A 和城市 B 结盟了，我们就称它们是互相匹配的。所谓最大匹配是指，每个城市 C 要么自己有同盟，要么它的所有相邻城市都有同盟。

热身问题

P³ 假定一共有 8 个城市。那么一个最大匹配中最少可以有几个匹配？

热身问题解答

最少可以只有一个匹配，如图 55 所示，唯一的匹配用实线段表示。

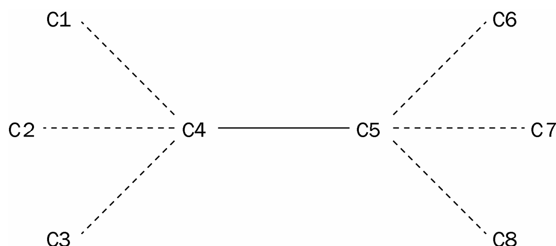


图 55　每条线段（实线或虚线）都代表一条道路，实线代表结盟。只有 C4 和 C5 是匹配的，其他城市都没有同盟

这个单一的匹配使得其他的匹配都无法成立，因此这是一个最大匹配。现在，让我们来回顾一下最大化和最大值的区别。所谓最大化的状态，是指无法加入新的东西，在此例中，也就是更多匹配的城市对。所谓最大值，是指无法获得更大的数值。因此，虽然这个匹配是最大化的，但它并不是所有最大匹配中包含的匹配数最多的。图 56 所示的最大匹配，包含的匹配数才是最多的（请注意，还可以对称地构造出若干个这样的最大匹配）。

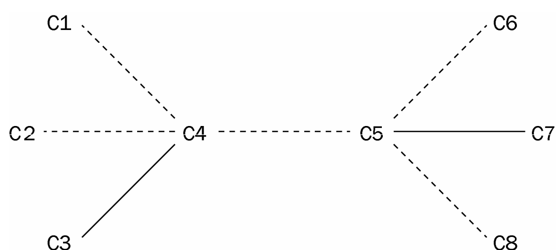
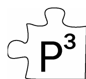


图 56　在这个最大匹配中，一共有两对匹配的城市：C3 和 C4，C5 和 C7。其他各对城市也有可以匹配的，但是最多也只能有两个匹配

热身问题中展示了两个最大匹配，其中第一个糟糕的最大匹配所含有的匹配数只有第二个的一半。我们想知道这个可以推而广之到什么程度。

(1) 能不能找到一个例子，通过对城市和道路进行一定的布局，使得能找到两个最大匹配，其中一个的匹配数是另外一个的两倍以上？如果可以，请举出例子。否则，请证明为什么不可能。



答案

1. 能不能找到一个例子，通过对城市和道路进行一定的布局，使得能找到两个最大匹配，其中一个的匹配数是另外一个的两倍以上？如果可以，请举出例子。否则，请证明为什么不可能。

这不可能发生。也就是说，含有最多匹配的最大匹配（记为 Mmax）中的匹配数不可能多于含有最少匹配的最大匹配（记为 Mbad）的两倍。理由非常简单。考虑 Mbad 中的连接结点 $n1$ 和 $n2$ 的边。如果我们去掉这条边，可以使得 $n1$ 和 $n2$ 能够跟其他的结点匹配，但是 $n1$ 最多只能匹配一个其他结点，$n2$ 亦是如此。因此去掉 $n1$ 和 $n2$ 之间的一条边，顶多也只能额外生成两条边。

7.13　决胜老虎机

启发式算法是基于问题开销或改良的贪心策略（例如模拟退火算法中用到的）在状态空间内展开最优解的搜索。有时候，你无法控制要搜索的状态空间的大小，或者，每个搜索配置非输即赢，没有输赢之间的状态。但即使在这种情况下，如果优胜状态能具备一定的结构，便还是可以有优于穷尽搜索的方法。

“组合设计”理论可以在此发挥用处。它的主旨是，即使不检验搜索空间的每个位置，你至少可以在某种意义上系统化地设计测试案例。例如，或许你可以保证每个参数的每个取值都至少被试过一次。当然通常情况下，这是不够的。或许你可以保证每对参数的所有可能值组合都被检验过一次。在此题中，参数的可能值是三元组。

我们来考虑一个特殊的五轮老虎机。其中一个转轮有 4 个不同值，其余 4 个转轮都是 3 个值。

转轮 1：苹果，樱桃，葡萄，梨
转轮 2：樱桃，葡萄，梨
转轮 3：苹果，葡萄，梨
转轮 4：苹果，樱桃，梨
转轮 5：苹果，樱桃，葡萄

在这台老虎机中，玩家设置好各个转轮的值，然后拉动杠杆。如果转轮值的组合是中奖组合，你就赢了 500 美元。每拉动一次杠杆要花 10 美元。转轮值的组合是否能中奖只取决于 3 个转轮。你不知道具体是哪 3 个，但知道第一个转轮是其中之一。如果幸运的话，只要找到 3 个转轮的正确的值，那么剩下的两个转轮的值就无关紧要了。举例来说，假设中奖组合是转轮 1 为苹果，转轮 3 为葡萄，转轮 4 为梨。只要将这 3 个转轮的值设置对了，你就能得到奖金，转轮 2 和转轮 5 可以是任何值。

热身问题

P3 每当玩家中奖或者尝试次数达到 15 次后，中奖组合就会被更改。每次尝试都要花 10 美元，但是中奖的奖励是 500 美元。你可以对该游戏进行设计，使其对玩家有利吗？

热身问题解答

为了理解解决该问题的思路，首先要意识到剩下的两个转轮一共有 9 种组合情况，因此中奖组合一共有 9 种可能。而 5 个转轮一共有 $4\times3\times3\times3\times3=324$ 种组合情况，因此中奖的概率是 9/324=1/36。因为每次拉杠杆花掉 10 美元，中奖能获得 500 美元，所以还是值得赌上一把的。即使每次拉动杠杆后中奖组合都会改变，结论也不会改变。

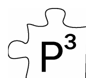
其实你的胜算还能更大，因为每把尝试都能缩小搜索空间。这就好像你在玩 21 点时，如果你记下已经出过的每张牌，随着游戏进行，你获胜的几率就会增大。

(1) 能够给出保证最多只要试 36 次就能中奖的方法吗？

我们注意到，你想将转轮 1 的每个值和其余任意两转轮的所有可能值对组合在一起。例如，以下展示了 3 个转轮值组合，每一行的 5 个水果按顺序对应 5 个转轮。

1，苹果，梨，苹果，梨，苹果
2，苹果，樱桃，苹果，苹果，葡萄
3，苹果，葡萄，苹果，樱桃，樱桃

我们发现这 3 个组合对应的是转轮 1 为苹果的情况，并且将转轮 3 定为苹果，依次测试了其他各转轮的所有可能值。除此之外，还涵盖了转轮 2 和转轮 4 的为（梨，梨），（樱桃，苹果），（葡萄，樱桃）的情况。因此，对于转轮 1 的每个可能值，我们只需要用几个转轮组合就能检验完其他转轮两两成对的很多可能组合。我们也要记录还没有检验过的转轮值对并系统地进行编排，从而避免重复检测转轮值对。提示已经足够多了，你来试试看吧。



答案

1. 能够给出保证最多只要试 36 次就能中奖的方法？

下表列出了 36 个转轮值组合，确保了转轮 1 的每个可能值和其余任意两转轮的所有可能值对的全部组合。

编号	转轮1	转轮2	转轮3	转轮4	转轮5
1	苹果	梨	苹果	梨	苹果
2	苹果	樱桃	苹果	苹果	葡萄
3	苹果	葡萄	苹果	樱桃	樱桃
4	苹果	樱桃	葡萄	樱桃	苹果
5	苹果	梨	梨	樱桃	葡萄
6	苹果	樱桃	梨	梨	樱桃
7	苹果	梨	葡萄	苹果	樱桃
8	苹果	葡萄	梨	苹果	苹果
9	苹果	葡萄	葡萄	梨	葡萄
10	樱桃	梨	苹果	梨	苹果
11	樱桃	樱桃	苹果	苹果	葡萄
12	樱桃	葡萄	苹果	樱桃	樱桃
13	樱桃	樱桃	葡萄	樱桃	苹果
14	樱桃	梨	梨	樱桃	葡萄
15	樱桃	樱桃	梨	梨	樱桃
16	樱桃	梨	葡萄	苹果	樱桃
17	樱桃	葡萄	梨	苹果	苹果
18	樱桃	葡萄	葡萄	梨	葡萄
19	葡萄	梨	苹果	梨	苹果
20	葡萄	樱桃	苹果	苹果	葡萄
21	葡萄	葡萄	苹果	樱桃	樱桃
22	葡萄	樱桃	葡萄	樱桃	苹果
23	葡萄	梨	梨	樱桃	葡萄
24	葡萄	樱桃	梨	梨	樱桃
25	葡萄	梨	葡萄	苹果	樱桃
26	葡萄	葡萄	梨	苹果	苹果
27	葡萄	葡萄	葡萄	梨	葡萄
28	梨	梨	苹果	梨	苹果
29	梨	樱桃	苹果	苹果	葡萄
30	梨	葡萄	苹果	樱桃	樱桃
31	梨	樱桃	葡萄	樱桃	苹果
32	梨	梨	梨	樱桃	葡萄
33	梨	樱桃	梨	梨	樱桃
34	梨	梨	葡萄	苹果	樱桃
35	梨	葡萄	梨	苹果	苹果
36	梨	葡萄	葡萄	梨	葡萄

7.14　骰子的奥秘

如果你觉得概率分析实非易事，估计会有很多人举手赞成。尤其是碰到涉及概率的复杂情形时，直觉往往会将我们领入歧途。

在和概率打交道方面，我也算是老手了。从8岁到11岁这几年，我经常把美丽的午后时光花在概率上。准确地说，我是在赌博——21点及轮盘赌，但主要是在打牌。底注是3美分，如果能赢上5美元，就称得上是美妙的一天。一般情况下我都能赢。这不是在吹嘘，但是对于抓到不同牌的概率，我还是有些切身体会的。

对于简单的问题，我只要跟着直觉走就行，但是我缺乏分析方法。概率论的课程确实有所帮助，但我发现，很容易就会犯一些看起来很小但往往能酿成大错的问题。

有时候，就连专业的数学家也不能幸免。1990年，专栏作家玛莉莲・沃斯・莎凡特（Marilyn vos Savant）发表了著名的蒙提霍尔（Monty Hall）问题。尽管她给出了正确的答案，但是很多人，包括数学家们，都指出了她的错误。以下就是这道著名的谜题，让我们来看看你会怎么做。

这道题是出自一个电视游戏节目[①]，问题的名字来自节目主持人蒙提・霍尔。游戏的玩法是：主持人总是遵循相同的规程，展示给参赛者3扇门，分别记为D1、D2和D3。其中一扇后面有一个贵重的奖品，蒙提知道具体是哪扇。其他两扇门后面则是山羊。参赛者选定一扇门，比如说D1，但蒙提不会打开D1，而是开启剩下两扇门中的一扇，比如说D2，门后有一只山羊。于是主持人给参赛者一个机会，问他要不要把D1换成另一扇仍然关上的门D3。现在，问题是：参赛者应该换吗？

为了分析这个问题，我们先将所有可能的等概率情况都列出来，然后在每个情况中就参赛者的选择展开分析。在下表中，V代表贵重的礼物，G代表山羊。

D1	D2	D3
V	G	G
G	V	G
G	G	V

如果参赛者一开始选对了门，那么他只要坚持原来的选择，就能赢得奖品。然而，在另外两种情况下，他需要更改原来的选择，才能赢得奖品。也就是说，在三种情况中有两种需要通过更改原先的选择才能赢。因此，很简单，参赛者应该换到另一扇门去。

在大部分情况下，把所有可能等概率的情况都写下来依次分析是非常有效的解题策略。让我们再来看几个问题。

① 节目名称为“Let’s Make a Deal”。蒙提霍尔问题亦称为三门问题。——编者注

爱丽丝作为挑战者，将掷出两个标准的骰子[①]，且她一直将这两个骰子置于一个不透明的容器里，并偷看骰子上的数字。掷出骰子后，她告诉你这两个骰子上的数字总和是 6。她邀你来打个赌，赌注是同额的：告诉我这两个骰子中较大的那个数，如果你说对了，我付你 100 美元；否则，你付我 100 美元。你会接受这个邀请吗？

写下所有发生概率相等的可能情况。

```
5        1
4        2
3        3
2        4
1        5
```

你可以看到，在这 5 种情况中，最大值是 5 的情况占了两种，最大值是 4 的情况也占了两种，最大值是 3 的情况只有一种。对于等额投注来说，这样的获胜概率太低了，你还是婉言谢绝吧。

现在她告诉你这两个骰子的数字都不是 5。她还是继续邀请你来赌上一把，赌注是同额的。现在你应该接受吗？

如此一来，只有三种等概率的情况了：

```
4        2
3        3
2        4
```

现在如果你猜 4 的话，获胜的概率是 2/3。

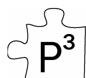
假设这两个骰子的颜色不一样，一个是红色，一个是绿色。现在爱丽丝告诉你绿色骰子的值不是 5。那么，有哪几种发生概率相等的情况呢？

绿	红
4	2
3	3
2	4
1	5

现在，如果猜 4 的话，你获胜的概率正好是 1/2。

下面来一个更难的。

(1) 假设绿色的不是标准的骰子，扔出 3 的概率为 1/2，扔出其他 5 个值的概率都是 1/10。红色的还是标准的骰子。爱丽丝这次掷出的总和为 8，她继续邀请你来跟她赌一把较大的那个数字，赌注同额。你会接受邀请吗？



① fair dice，指掷得每面的概率均相同。——译者注

答案

1. 假设绿色的不是标准的骰子，扔出 3 的概率为 1/2，扔出其他 5 个值的概率都是 1/10。红色的还是标准的骰子。爱丽丝这次掷出的总和为 8，她继续邀请你来跟她赌一把较大的那个数字，赌注同额。你会接受邀请吗？

同样，让我们来列出所有等概率发生的情况。在这个问题中，我们先忽略 8 这个总和，把所有可能掷出的骰子的组合列出来。

绿	红
1	1，2，3，4，5，6
2	1，2，3，4，5，6
3	1，2，3，4，5，6
3	1，2，3，4，5，6
3	1，2，3，4，5，6
3	1，2，3，4，5，6
3	1，2，3，4，5，6
4	1，2，3，4，5，6
5	1，2，3，4，5，6
6	1，2，3，4，5，6

我们将绿骰子扔出 3 的情况列了 5 次，绿骰子扔出其他值的情况各列了一次，因为扔出 3 的概率是其他值的 5 倍。现在将那些总和不为 8 的划掉，剩下的便是所有可能的情况。

绿	红
2	6
3	5
3	5
3	5
3	5
3	5
4	4
5	3
6	2

在上述 9 种情况中，5 是较大值的情况有 6 种。因此你猜 5 的话，赢的概率是 6/9=2/3。

7.15　西瓜还是芝麻

这道题讲的还是一个跟门有关的邀请你参与的电视游戏节目。在这个新的节目中，只有两道门。每道门后面都有一堆克鲁格金币，但是其中一扇门后面的金币数是另一扇门后面的两倍。你先来选择一扇门，主持人随即为你打开这扇门，然后你可以决定是否要更改自己的选择。

想象一下吧。你站在台上，灯光炫目。主持人刚刚打开了你选的门，金币闪闪发光。全场观众欢呼，羡慕不已。就在那么一瞬间，你觉得自己都快要眩晕过去了。这时候，就跟蒙提霍尔问题一样，主持人打断了你的遐思，给你提供了一个更改最初选择的机会。（他对所有参赛者都是这样。）你愿意换吗？

在作出决定之前，你要先知道都有哪些情况。有一半的可能，一扇门后面有 100 个金币，另一扇后面是 200 个金币。有 1/4 的可能，一扇门后是 200 个金币，另一扇后面是 400 个金币。还有 1/4 的可能，一扇门后面有 400 个金币，另一扇后面有 800 个金币。

你的目标是使预期收益最大化。

热身问题

P³ 假设最初选择的门后面有 100 个金币，你要改吗？

热身问题解答

当然要换，因为金币只可能更多。同理，如果门后面是 800 个金币，那就要坚持原来的选择。

---

(1) 如果门后面是 200 个金币，你要改吗？

(2) 如果门后面是 400 个金币，你要改吗？

(3) 假设我们提到的 3 种情况的发生概率不是 1/2、1/4 和 1/4，而是 1/3、1/3 及 1/3。那么如果门后面是 400 个金币，你要改吗？

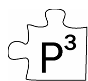
这个电视节目秀迎来了新的一季，制作人担心收视率下降，所以增加了金币的范围：25、50、100、200、400、800、1600、3200 和 6400。也就是说两扇门后的金币数可能会是：(25, 50)，(50, 100)，以此类推，一直到(3200, 6400)。且这些都是等概率发生的。

(4) 假设一开始选的那扇门后的金币数不是 25 也不是 6400，你应该更改吗？

又是新的一季，收视率有点萎靡不振。制作人决定将金币的数量范围增至 1 到 1 048 576，且他保证所有$(x, 2x)$的组合都是等概率发生的。但是既然几乎不可能选到最多金币和最少金币，在

参赛者第一次作出猜测后，主持人就不会再展示门后的金币了。在参赛者作出最终的选择后，门帘拉起，露出一大桶金子，可预见的是，伴随而来的将是观众的阵阵惊呼声。

(5) 如果主持人不再打开第一次猜的那扇门，参赛者应该更改最初的选择吗？



答案

1. 如果门后面是 200 个金币，你要改吗？

让我们列出所有发生概率相等的情况。因为(100, 200)组合发生的概率是其他组合的两倍，所以我们列两次。所有等概率情况如下，每一行表示一对金币组合：

```
100          200
100          200
200          400
400          800
```

因此，如果你看到 200 个金币，实际金币是(100, 200)的可能性将是(200, 400)的两倍。这时如果你更改选择，换到另一扇门去，那么最终少获得 100 枚金币的可能性是多获得 200 枚金币的两倍。因此，通过更改选择而多赢得的金币数的期望值实际上是 0。总之，决定权在你手上。

2. 如果门后面是 400 个金币，你要改吗？

在这种情况下，实际金币可能是(200, 400)或(400, 800)，且这两种情况发生的概率相等。如果是(200, 400)，换一扇门会让你少获得 200 个金币。如果是(400, 800)，换一扇门会让你多获得 400 个金币。因此，更换一下还是可以增加收入的。

3. 假设我们提到的 3 种情况的发生概率不是 1/2、1/4 和 1/4，而是 1/3、1/3 及 1/3。那么如果门后面是 400 个金币，你要改吗？

在新的假设下，列出所有发生概率相等的情况如下：

```
100          200
200          400
400          800
```

对于门后是 400 个金币的情况，还是一样，你应该换一扇门。顺便说一下，当门后是 200 个金币时，你也应该换。因为你有 1/2 的概率可以多得到 200 个金币。

4. 假设一开始选的那扇门后的金币数不是 25 也不是 6400，你应该更改吗？

推理过程和上一问一样，结论是每次都要改。

5. 如果主持人不再打开第一次猜的那扇门，参赛者应该更改最初的选择吗？

一般来说，在新的规则下，更改选择并不能带来什么收益。根据对称性，很容易得出这个结论。因为如果更改有用的话，参赛者每次只要一开始选择另一扇门就可以了。因为主持人不会开启任何一扇门，所以参赛者无法从中获得任何信息。但是如何给出一个系统的分析过程呢？先列出所有等概率的可能情况如下：

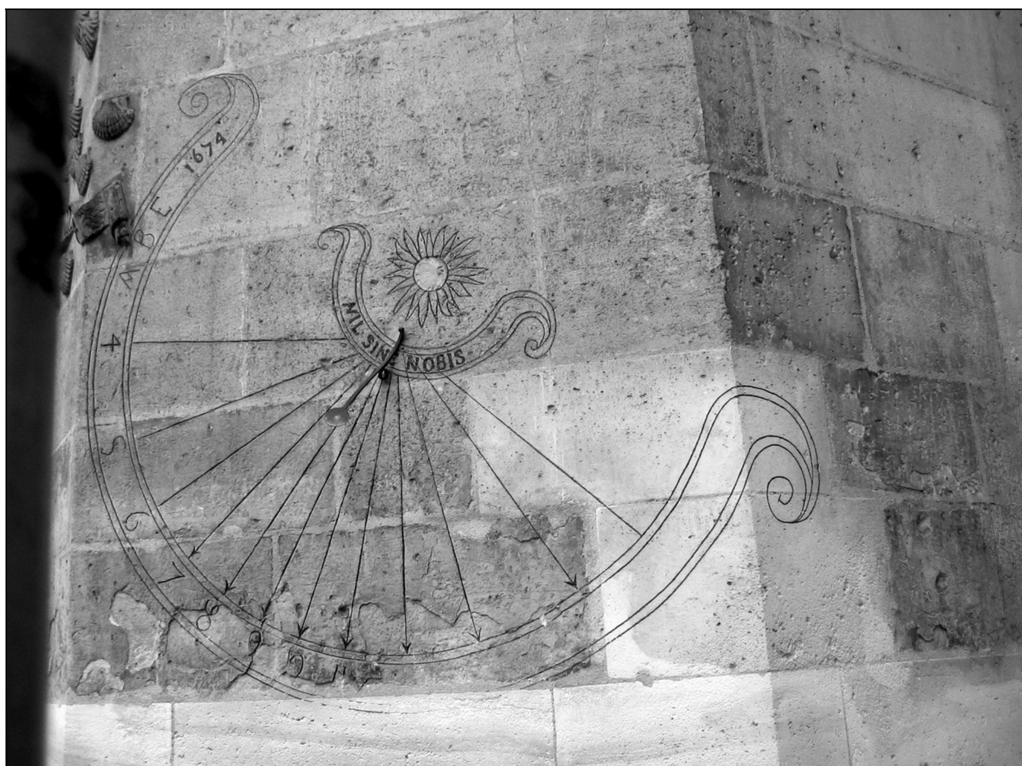
```
1            2
2            4
4            8
...
524 288      1 048 576
```

在每种$(x, 2x)$的情况下，如果参赛者从 x 更改到 $2x$，他将多得到 x 个金币；但如果是从 $2x$ 更改到 x，他将少得到 x 个金币。因此，如果采取更改策略的话，他能获得的净收益（或净亏损）是 0。为什么现在这样会和之前主持人可以打开参赛者选择的那扇门时有所不同呢？在之前的规则下，参赛者不需要更改的唯一情况是当开启的门后有 1 048 576 个金币的时候。而这种情况发生的概率是 1/40，但正是因为参赛者没有更改最初的选择，他为此能多得到 524 288 个金币。知道第一次选的门后面有多少金币的优势也正是体现在此处。

第三部分
冒险故事

温暖的手能用头发牵着大象走。

——波斯谚语



第 8 章

忠诚的敌人

从蒙彼利埃（Montpellier）开往巴黎的高速列车以 300 公里的时速奔驰在法国的田野上，可是我和艾可（Ecco）还是觉得太慢了。艾可手里紧紧攥着早上酒店服务生交给我们的便条，那是凯特的留言："杰克，速来巴黎，不要打电话，罗丝失踪了。"

假期开始时，一切都还顺利。前一天艾可和他的法国朋友去格瑞桑（Gruissan）挑战风帆冲浪了。晚上我们到镇上的赌场欣赏了优美的民歌。次日艾可本来打算睡个懒觉，因为这里下午的海风最适合冲浪，但是一大早我们就被服务生急促的敲门声吵醒了。服务员说："艾可先生，您起床了吗？凯特女士有一条留言给您。"

我们就这样登上了这趟列车，上车后一个多小时艾可一言未发，我也一直在沉思。整件事情实在是有点蹊跷，首先，凯特为什么不让我们打电话呢？

"她或许担心电话被窃听，教授，"艾可终于开口了，显然是看出了我心里在想什么，"她不想她女儿卷入不必要的危险中。罗丝一直跟她的好朋友们在攀岩，总不会是自己失踪的吧，肯定是被别人带走的。"

"她不会被绑架了吧？"我问道。

"这可能还不是最坏的，"艾可答道，"见到凯特她们后应该会了解更多情况的。"

艾可又陷入了沉默。我回顾了一下自己所了解的罗丝的生活，想从中发现一些线索，看看究竟有谁会要加害于她。可是，想来想去好像谁都有嫌疑。罗丝从小由母亲凯特带大，她们生活在俄勒冈州胡德里弗附近的哥伦比亚河沿岸。认识艾可以后，凯特开始练习风帆冲浪，并且也教会了当时只有 12 岁的罗丝。罗丝动作敏捷，是天生的冲浪好手，她也花很多时间练习，所以在很多比赛中获胜。但是罗丝最喜欢的运动还是攀岩，从史密斯岩石公园（Smith Rock）到比肯公园（Beacon），再到华盛顿州东部的山区，罗丝[①]熟悉所有最适合攀岩的地方，也结识了很多攀岩高手。

罗丝 17 岁的时候，凯特因工作调动，带着罗丝和她的两个妹妹克洛（Cloe）和伊莱（Eli）（克洛和伊莱是一对双胞胎）搬到了俄亥俄州的代顿市（Dayton）。罗丝到克利夫兰市（Cleveland）

---

① 原文为 Kate，有误。——译者注

的一所艺术学校读书，潜心学习建筑雕刻。需要钱的时候，她也会去做一些社会工作。她跟各种类型的孩子打交道，比如无家可归的孩子、问题儿童及遇到各种麻烦的孩子，等等。她跟这些孩子一起搭建栖身之所，帮他们找到家园，还经常跟他们交谈。这些孩子有什么心里话都愿意跟她说。在 2004 年 11 月的议会选举结束后不久，她的一个小朋友在垃圾堆里拾荒时发现了一袋凯霍加县（Cuyahoga County）的选票，全是已经打了孔的有效选票。罗丝怀疑这是选举舞弊，于是把这些选票保存了下来。

从她自身安全考虑，这样做可能真的不太明智。从那以后，她自由自在的学生生活一去不复返，而且被一个狂热的宗教团伙盯上了，只能东躲西藏。这个团伙自称“圣火战士”，他们的徽标是一个升起在熊熊火焰上的红十字架。他们跟踪她回到了俄勒冈州，还把她的攀岩伙伴斯科特（Scot）打得遍体鳞伤。他们想要得到她手里的那些选票，这一点是显而易见的。罗丝把选票藏在了一棵树下。没过多久，她和另外一个朋友驾车驶过胡德里弗桥时，两辆小货车把他们堵住了。罗丝知道自己被抓住的后果，于是纵身从桥上跳了下去。没想到她死里逃生，游到了安全的地方。在她东躲西藏的日子里，凯特和艾可联手多方人士将那些选票公之于众，并证实了其真实性。[欲知完整故事，请参照我在《数学谜工》（*Puzzler's Elusion*）一书中的详细描述。]后来圣火战士的核心成员在埋炸弹时被抓获入狱。我们以为这件事情就算结束了。

然而麻烦却接踵而来，首先就是出名带来的问题。尽管很多人都渴望出名，但是艾可博士却不愿成为公众关注的焦点。“这已经是我第二次被拖下水了，搞得声名狼藉，我希望这是最后一次。”在圣火战士的最后一个大头目被捕后，他这样告诉我，“我只想继续做自己最擅长的事——在安全的客厅里解谜题。”

不过，某些事情也随着名气而有所改变。一旦出了名，人们就会对你另眼相看，有时连你自己都不知道是为什么。艾可出名后，来拜访他的名人络绎不绝，向他咨询一些紧迫的私人问题。艾可也会稍微耐心地解释，说他并不是人们想象中的“万事通”。“我能解决的问题一定是具有数学特质的。我可不知道什么颜色的头发能让你顺利出演下一个角色。”

除了名人外，政府机构的官员也经常给他打电话，通常是和监控器或者白噪声有关的问题。即使是讨论这些问题，他们讲话声音也很小，像是在耳语。

公众人物带来的光环打破了艾可平静的生活，但不得不承认，这也给他带来了好处。一天，我们突然想去他最喜欢的莫里诺酒店吃饭，就临时给饭店打电话，结果成功得订到了座位。事后他对我说：“这点小名声在机场和饭店还是很有用的。”

接着，大约 3 个月以前，艾可开始收到神秘信件。第一封是在 6 月的第一个周六收到的，是在他纽约的信箱里发现的。信上只有一句用黑笔写的话：巴比伦城陷落了。信纸的背景图案是一团熊熊烈火，其具体形态与圣火战士的徽标有所差异。相比之下，圣火战士的徽标要含蓄得多，而这团火类似于火焰风暴。

又过了 3 个礼拜，我在艾可家门前捡到了一张皱巴巴的便条。背景图案仍然是那团熊熊烈火，但这次写的是：她额头上写着一个名字……

我把便条拿给艾可，他看了一眼，然后在房间里边踱步边翻来覆去地看这张纸。

“为什么信的内容都源自《圣经》呢？可能是某种嘲弄，但这是为什么呢？”艾可大声问道，但我们一点思路也没有。

又过了两周，我们在艾可家门上发现一张广告传单，同样的火焰背景下有这样一句话：有一位大力的天使举起一块石头，好像大磨石，扔在海里。

艾可翻开《圣经》，发现这句话也出自《启示录》，描述的也是巴比伦城陷入暴力时的场景。

“如果这是一个警告，斯卡利特教授，”艾可对我说，“那肯定和纽约有关，因为很多原教旨主义者会把纽约比喻成罪孽深重的巴比伦。第二次的便条里提到的女人应该另有所指。罗丝是不是说过要和斯科特一起去巴黎附近的枫丹白露（Fontainebleau）攀岩？现在刚入秋，去勒卡特（Leucat）港附近风帆冲浪会很爽。或许我可以邀请凯特一起前往，让罗丝也多请一些朋友一起去。”

“我能不能也一起去？”我说，“这学期我正好休假。”

“当然可以啊，这样就太好了。”艾可回答说。

我们在九月中旬到了法国。凯特呆在巴黎，罗丝和她的朋友们在枫丹白露露营，我和艾可去了地中海。之前的几天里，长于思考又善于解决谜题的艾可似乎很享受海边每小时 65 公里的风速，一直待在家里。海风和海水——一切都如此舒适，如此简单，如此童真。我想艾可肯定非常喜欢这里。人们会主动融入适合自己的环境，但却不能接受自己的朋友被绑架或是遭到威胁。而现在摆在我们眼前的是：罗丝不见了。但愿她还安全。

“杰克，斯卡利特教授，真高兴你们来了。”我和艾可刚踏进这设施齐全的公寓，才放下背包，凯特就迎了上来。为了感谢艾可之前为法国政府所做的贡献，伊夫公司特意为我们提供了这套宽敞的顶楼公寓，从公寓里可以俯瞰塞纳河和雪铁龙公园。凯特已经在这儿住了一个礼拜，房间里堆满了各种商店的购物袋，看来她一直没闲着。

“她不见了，”凯特看着我们，我从来没见她如此苍白无助过，“罗丝不见了。我这儿只有一封写给我们的信，信封上的字是她亲笔写的，但里面的内容是打印的，看上去像是用密码编写的，还附有一个数独。罗丝的朋友们也被送到巴黎的不同地方去抄录密文。他们在等着和你谈话，但请先看一下罗丝的信。”

```
Efbs Oqo, Ghdu Hv. Jhht,

O'Bk hzrlk uG ljyCxAB GroDroB T oAGxp JEvGr o AtIItG. jxuO Jrzu LzsL BM QuM
JF, xQP f FyB SN TAKE QSFDBVUJPOT WR EZSMH NYX LGRROTM PU bPM faXWP RKXNc.
Ea gURl gOWR iWTn mekbT VeTipgk al TYmXk C rmjoZ ep. Fc wms'tc qdZc this
gbs, kv'u suredeoB so.

Knwxy EuA ohCl Bw twxF DrkD T Ftuzw V'z uCwBu ID ru FB. lzwQ PBEE NuEy Hz
wSwU yRQ LMR ENQ TOO MPOH. vJGa WROG QI YMJd cUT'Z OHYT UM RW KXi hLj. U
Qba'g Ybck lWTgT y'c XfZeX WalZWj, Unm C Yj dWra pljb gldmpkYrgml.
```

Rdbnmc, I lopx yjgtg pB jvmirhw Bjwj yktz: Nhyl UwvBxizviAAm, QkBo op XKAz, cynpr XsoBBs s'PGr, gFIKv v'gJDwsFK, iEtvx xy Gv XwOPEHHA, mIxzB BC Kz nATION, mF uGPCV, jDUH h'eYWXIVPMXd, FSI, TGZaXGRRe p OcMaa, oQVScO yZecP pMYQ.

GUVeQ, hVSm'jS idaS cU kYRk qgm pbee VY VWgZ pk cfka kc sgqntfg an fousbodf kp d givxemr ymjfywj Ckrr luvBno. bpmG'zm wxC Dyy nwplC mnAGF GuvF HvsoHFsxC vqsJ. Z'D FGL LNKx QByNByL DO'N OPEHH xzQFSB MP MNS BUT UIFZ UCa LW'V SPH, NY aYKJ aV aMIb cQXdbJWMb, KXN XLYj aR gUR dSfTcfaObQSg RdcRTgcTS mQjUh ReU VWSlZ. LhngWl mjiies.

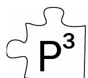
Ajpm, pdau pXfa rfc knbZshnm of uijt vjgcvtg lv ettvsBmqexipC ymj iktzkx(AolF Aiql "Cqn lkvkxmo AztyE") Ar FrIrA Ct Iwt IyJuI KF OzAuz FR zLCyHxM RzMz OAJP. tEFzE QCTCL? gDQD IS XIBU VJGa VDLG: "wYTTSWI dTZ IGT VYKLY bPM bcXaRNb SX eSP YQeeMSQe lbhe TfWSbRg WPkT hUSUYlUT, ReU fmeTWj maXf 1 ocmjpbc 9 XZZloafkd rm sgZs order. Pqy khuh mw f yAjuqA.

7							6	4
		6						
					8		2	
5	6	3						
				7		2		9
	5					3		
			4				9	
1	7		9					8

Tjp'gg jkpeYa qeb qgvrf khmd is bmm 0u (0v gsvviwtsrh yt hrgtqy). dolu GwC BxuEn DrsC DFozvF, xAAw nG Hvs uxGHI IuLuD ELDsvIJ AF MAtM FCHy. oCzMz IECDP yB y EDV SOLUTIONS. jG UQ, NQRZ XLEX YMJ cUSKT OHcL JMMV bNWc dY cPWPgLYe XaOMfUaZe. sVTheR cih iWT beSQjYedi TfiiVjgfeUZeX lg mahlX hogVYlm amjh pda jbppXdbp. Dglb sgd balance qpjou. aqw zloo fi hqtxj zu Aol BCvvmt nwCAjwln."

S ozy'E wzAI nAL ACFs IwpC JxqJ. gCvrJv uGEw yBGw Gy, vN OKKJ xP WMS BzM. i TBZ VJCV l XVYWX YMJR, HaZ UVa bPIb VdLQ. (sP eSPj fdMZeXMfQ gUNg ZWbS, Xi'h Q XffU kaYf.)

EhoX, LimY



艾可一读完信，凯特便急着问：“你认为她还活着吗？”我不知道艾可会怎样回答，因为我根本没看懂这封信。

“她应该是安全的，”艾可说，“要害她其实很容易，她和朋友们在枫丹白露的树林里攀岩的时候，只要一颗子弹就能要了她的命，所以我认为她不会有太大危险。”

我很想相信艾可，但还是和凯特一样担心。

艾可转过头来对我说：“亲爱的教授，罗丝失踪了，但她的朋友却回来了。带走她的人可能就是想单独和她谈谈。他们甚至还让她写了一封信。

“信的内容该不会说他们只是需要隐私吧？”我这样想了想，但是没说出来。

艾可可能猜到了我的问题，因为他脸上闪过一丝微笑，朝我点了点头，然后对凯特说：“我们去听听罗丝的朋友们怎么说。”然后我们就去了宽敞的餐厅，他们已经在那儿等候多时了。

阿米莉亚（Amalea）在攀岩之余还从事写作，她先发话了：“我们在枫丹白露区米莉小镇附近的森林露营，那里很适合攀岩。天气如果太热我们就在树荫下乘凉，而且大部分岩石部分裸露于阳光之下，所以即使下雨，也很快就能干。不过在那里容易走丢，当然也容易藏身。当时我总感觉有人在跟踪我们。”

布拉德打断了她，说：“阿米莉亚告诉我这些后，我把大家召集起来，说罗丝去年树敌很多，不应该单独行动，其他人也是，所以大家要尽量集体行动。”

阿米莉亚接着说：“我们都按布拉德说的做了，但罗丝有时候会和杰森以及威尔一起去挑战高难度的岩石。”杰森和威尔走过来，他二人身材消瘦但很强壮。杰森在华盛顿州怀特萨蒙市为攀岩高手提供向导服务，他会带高手们去挑战一些不知名的悬崖峭壁，他们在攀登之前会先拿难度为 5.13A 的路线热热身。威尔在攀岩间隙也写剧本。

“枫丹白露地区的攀岩和我们所知道的不一样。”杰森说，“我们在哥伦比亚河谷以及史密斯岩石州立公园这些地方攀登的是悬崖峭壁，而枫丹白露岩壁上手点特别小，有时甚至只容得下手指甲，但岩壁还是比较平坦的。我们本来是想来这里好好玩的，现在却发生了这样的事情。”

“一天，我们三人在拉尚的象岩附近，那儿的岩壁表面是沙子，但巨石隆起很高，所以攀爬时需要高度集中注意力。”威尔说，“一个拄着拐杖的老头儿走近我们，他一直站在那儿盯着我和杰森，当然还有罗丝。”

“我不喜欢被一直盯着看，”杰森接着说，“除非我和他很熟。但是这个人我感觉还挺面熟的，所以就问该怎么称呼他。”

“‘叫我克里斯汀·德拉福尔（Christien de la Foi）’，老头儿说，‘这里所有的蓝色线路和大多数绿色或黑色线路都是我标记出来的。有一次我和朋友在 40 分钟内完成了所有的橙色线路，而有些人要用 3 天才能完成。’”

“这个人好像有些名气，”杰森接着说，“但是我不确定，所以向他请教我正在尝试的一条路线。他回答得很准确：‘身体向上蹬，左转 70 度，然后右手移过去支撑身体站起来，这样就上去

了。’按照他的指点，我们接着攀岩，他就在旁边看着。完成后，我们在一旁抽烟休息。”

“这时候，大家都围过来了，”阿米莉亚说，“老头儿没有跟我们握手的意思，只是环顾了一下我们。他指了指威尔、杰森和罗丝三个人，说：‘这三个人还算可以。美国人来这儿攀岩一般就是胡闹，不过他们还不错。我们这儿有个说法：摔下来的都是傻瓜。你们三个还不算傻。’”

“我想法国人这么说也算是美赞了。”杰森笑着说。

威尔接着讲下去：“老头儿把拐杖靠在岩石上，然后拿出一个卷幅似的东西，对罗丝说，‘请读一下上面的内容。’”

“‘抱歉，我们是到这里攀岩的。’说完，罗丝转身朝下一个岩石走去。”

“‘就是一首诗，麻烦你了。’老头儿还没死心。”

“我们把卷幅带来了。”说着，威尔把它递给了艾可。艾可大声读起来：“她从遥远的西方来到我们身边，有着强壮的体格和亮闪闪的红发。她知道我们的谜，能听懂我们的歌。”

威尔接着讲下去。

“‘小姐，她就是你，’老头儿指着罗丝扎起来的红头发说，‘你已经通过了首轮检验——有着强壮的体格和亮闪闪的红发。’”

“‘你到底在说什么？’罗丝问。”

“‘我是一名圣殿骑士，’老头儿说，‘你知道我们的，确切地说你知道我们遇害的孩子——圣火战士。他们的领袖是圣殿骑士的后代。请所有人随我们一起回巴黎。对于已经找到的一些信息，我们需要你们的协助。’”

斯科特插嘴说：“我当时就告诉老头儿，‘我们是来这里攀岩的，对巴黎的了解也仅限于埃菲尔铁塔，但它是禁止攀登的，再说攀登它也太容易了。虽然我们是美国人，但也不认为法国人都像《达芬奇密码》描述的那样。’”

“‘是这样的，但我们真的很需要你们，’老头儿说，‘极为需要。如果你们想要钱，我们绝对能满足你们，我们秘密宝库里有的是拜占庭时期的金币，你们只需借给我们三天时间。我们在巴黎市中心有一套漂亮的公寓，很舒适，我保证。’”

谢里（Cheri）坐到斯科特旁边，轻拍他的肩膀让他平静下来。她有点尴尬地笑了笑，说：“嗯，我一直在想办法还清助学贷款，老头儿说的金币似乎能帮上忙。我就对大家说，‘教我们中世纪艺术史的教授曾经多次提到圣殿骑士，他们都富可敌国，我们不妨信他一次，反正大家是在一起的。这样我们也能好好洗个热水澡了。’”

布拉德接着讲下去，“不知道为什么，我们被谢里说服了。我们确实需要休息一下了，并且能在巴黎免费住上三天也没什么不好。反正大家都在一起，他们能把我们怎么样呢？就这样，我们在三天前回到了巴黎。他们安排我们住在左岸的一套公寓里，风景很好，可以眺望塞纳河和卢浮宫。第一天休息，他们还送来了算得上顶级奢华的、美味的馥颂食物。”

“第二天下午，老头儿带着另外两个人来了，他们年龄差不多，将近七十的样子。”

“‘金币我们带来了，’拄着拐杖的老头儿说，‘其实财富并不能带来幸福，不过你们还年轻，不明白这些。’他的两个助手拿出几袋金币，那些金币看起来很干净但年代颇久，上面刻着拜占庭教会的十字架。‘今晚我们信任且需要你们。’他解释说我们将被送到巴黎的不同地方，并抄录下所看到的匾额上的内容。‘我们将带你们每个人去不同的地方。请如实记录下看到的内容。不过在往返的路上我们将会蒙住你们的眼睛，因为路线比较特殊。’”

“我们不知道为什么非要我们去抄这些密码，但我们似乎已经不能抵挡那些金币的诱惑了，”布拉德接着说，“尤其在谢里去玛莱区的古董商那里证实了这些金币是真的以后。”

“有意思，”艾可说，“至少你们没有被欺诈，这很令我吃惊，但也更担心了，因为这说明他们是非常认真的。我认为罗丝知道一些他们要查明的真相。”

“只有威尔和杰森不想要任何金币。”布拉德补充道。

威尔说：“是的，我当时想不明白为什么他们不自己去抄录那些铭文。而且我也不在乎钱，我是到这里攀岩的。但我猜我们都是被这次冒险本身吸引了。”

“昨天午夜时分，”阿米莉亚接下去，“我们被蒙上了眼睛，然后被送往不同的地方。感觉有时是在穿越隧道，差不多每人在路上都花费了 4 个小时。到了之后我们按老头儿说的抄下了铭文，然后又被蒙上眼睛，被送回到圣叙尔比斯广场的喷水池旁。后来又回到了圣殿骑士提供的住处，但罗丝没回来。我们打电话告诉了凯特，而且一整天都在到处找罗丝。皮特、克里斯蒂和迈克还在找。”

“她现在肯定不会是自己在外面欣赏风景。”艾可说，“我们先看一下你们抄录的铭文，顺便等他们三个回来。我想请你们告诉我对被带去的地方还有什么印象。”

谢里先说：“我记得有一个漂亮的台子，上面有一根很高的浅绿色的圆柱，不过我被带到了附近的一条小巷。这是我抄下的铭文。”她把一张横格纸递给了艾可，纸上是加密的信息。

P³ Zyl Adu Ao oKu zJAGu bu JA mAToqJJu. LlTo AT wyl TKylJbW'o nJAYu VGyo yd RKudq, wyl WuubW'o cyddw Anylo NyTu. Iu YuAW Kud Wy KAdY.Iu jlTo Wuub qWsydYAoqyW. IKw GylJbW'o cu jlTo ATi Kud? IuJJ, qW Kud GyWTGqylT YqWb, TKu YAw Wyo duYuYnud, nlo Kud lWGyWTqylT YAw. Iu YlTo Odynu qo.

威尔是第二个说的：“我看见一条电车轨道，还有一家好像是叫朗德的咖啡馆。那儿刚好是一个主要的交叉路口。”

P³ bUi rFV rd oUFdV K'BFxVrsj. MUF VQrTGxV, DV dUUC UHVF dwV zrdwj rd gxisJ, FrdwVF XrF XFUT DwVFV JUi rFV sUD. kwUjV wrK DUsKVFXix dissVxj. tV rxjU TrsrAVK dwV VrFxIVjd LrdrLUTzj — ziFJIsA jCVxVdUsj rsK dFVrjiFV DwVs DV xVrFsVK UX dwV rddrLC zJ owIxIGGV Za.

下一个是杰森：“他们带我绕了好多圈，最后我被带到了一个大教堂的后面。那儿到处都是滴水嘴。”

P³ jzn huJ hv yzvuJ WhYJ. OhR UJ lnuH oH UJTT, vUhv JtoT cUoToffJ Mk. xJ UhV XuzFH rJhTznC zS znu FJhTvU hHV UhV YzCv zS nC YnuVJuJV — lnuHJV hv vUJ CvhmJ. Mv'C h TJCCzH zS UoCvzuR vUhv oS hH oVJHvoSohlTJ Xuznf FovUznv CnlCvhHvohT vUuJhv zS SzuKJ lJKzYJC vzz FJhTvUR, ovC FJhTvU FoTT lJ CvzTJH. Mv FhC hC vunJ Szu nC oH vUzCJ RJhuC zS SouJ hC ov UhC lJJH Szu vUJ IUoHJCJ zS CznvUJhCv LCoh. bJ FJuJ fhuvTR hv ShnTv.

“那可能是巴黎的某一个大教堂。”艾可推断道。

斯科特接着说：“我看见一个刻着很多人物的大型雕塑，其中有一个女性形象，她伸着右手，向前迈出一步。”

P³ FPl wvk wp CIwNk bk Iw xwphPO. Hk yIwlOpkb Plv ukwIpX pPP LlNX. TXPljX Plv Pvbkv Xwb Wpwvpkb wW POk Py qPPv ZOhjXpW, uk Xwb wNKlhvkb IwObW wOb LkwOW Py LwOlywNplvk wOb, pXvPljX Plv WkvYhNkW pP qhIjvhLW, YwWp LPOkpwvQ ukwIpX. Hk ukvk IPPZkb PO uhpX WlWqhNhPO wOb nkwIPlWQ. TuP NkOplvhkW wypkv Plv Okwv pPpwI bkWpvlNphPO, SwvphO flpXkv Nvkwpkb wO wIpkvOwpk AXvhWphwO YhWhPO.

“你们可真幸运，”阿米莉亚说，“他们带我去了一个很吵的火车站。”

P³ SxT aYn aV Vjn CaYn Gn qJxt. SxT WnYn ETPVn QTIIPMIn. lFnYPNatO xsVnt NjaOn asVnY QYnaV WnaIVj. mTV GYnaFO xs YPNjnO VnFvV FatJ vnxvIn, Ox JxT aYn txV aIxtn. CxIG atG OVxYPnO xs atNPntV NxPtO FaXn vnxvIn IxOn aII YnaOxt. lV Vjn jnPQjV xs xTY vxWnY Pt Vjn IaVn 13Vj NntVTYJ, Wn FatPvTIaVnG vaTvnYO atG vYPtNnO WPVj jatGsTIO xs QxIG. wxt'V MIaFn DjnYP atG UNxV. UNxV WaO MaGIJ YxTQjnG Tv MJ VjxOn jnaVjnt baYYPxYO xs Vjn havVTYn. in tnnGnG a ITNXJ MYnaX. DjnYP tnnGnG Vjn FxtnJ. Zjn NxPtO aYn YnaI. Ujn'II Mn aMIn Vx vaJ xss jnY NYnGPVxYO. Zxx MaG TtPpnYOPVPnO Pt lFnYPNa aYn Ox ngvntOPpn.

这时，皮特、克里斯蒂和迈克已经回来了。看他们的表情就知道没有找到罗丝。谢里告诉他们艾可目前的推论，罗丝很可能是被绑架了，但不会受到伤害。

接着布拉德回顾了一下他去过的地方：“我只记得我要抄录的铭文是在一家爱尔兰酒吧的门上，那儿附近的十字路口有一个雕塑，是一个身披盔甲骑着战马的女性形象。“

P³ FUO MnX Mh hiX CeMYX mXMggX R'wnY. FUO xMS gUh ZgUo hisk, POh CMnsk, PXeUo hiX pnUOgR, nXkXxPeXk M eMnpX koskk YiXXkX. tinUOpi hiX eUgp iskhUnS UT hiX YshS, XjXg oiXg hiX YshS oMk YMeeXR EOhXzsM PS hiX vUxMgk, CMnsksMgk ROp hOggXek OgRXnpnUOgR hU pXh POseRsgp xMhXnsMe. bg 17hi MgR 18hi YXghOnsXk, XghsnX khnXXhk UT CMnsk YUeeMakXR PXYMOkX UT hiX koskk YiXXkX-esZX YMjXngk OgRXngXMhi (oX cnXgYi YMee hisk pnOSXnX). bg 1777, GOseeMOxUh, kXYnXheS UT UOn UnRXn, oMk MaaUsghXR hU hMZX YiMnpX UT hiX OgRXnpnUOgR aMkkMpXoMSk sg UnRXn hU anXjXgh hiXx TnUx YUeeMaksgp. BX YeUkXR UTT kUxX hOggXek, nXsgTUnYXR UhiXnk TUn aOPesY OkX, MgR ZXah M TXo TUn UOn ansjMhX OkX. dUxX UT hiX PXkh MnX hiX UeRXkh, XkaXYsMeeS sg oiMh sk gUo hiX TsThi MnnUgRskXxXgh.

“下次去酒吧你就可以点一瓶这样的酒了。”阿米莉亚打趣道。她怎么还有心思开玩笑？难道她真的信了艾可的话，认为罗丝不会有危险？我可不这样认为。

迈克接着说：“我去的那个建筑附近有一个带着大池塘的花园。”

P³ RsY ILa IQ Da faqIQ. fsna sv sYL qYnbaL, ts vYLVsYt IQ Qja GjYLGj sv hsna vsL VQt HILQVGVHIQVsq Vq sYL qaIL aKQaLnVqIQVsq, gsVqaZ VQ. Ja jINa IodIpt HLsNVZaZ Qja GjVoZLaq sv DYQjaL dVQj QjaVL nstQ ZaZVGIQaZ nanbaLt. SqvsLQYqIQaop, tsna QYLq Qs vIqIQVGVtn atHaGVIoop LaiILZVqi Qja nVtYqZaLtQssZ bssM sv haNaoIQVsq. CjIQ Vt djaLa Qja JILLVsLt sv Qja hIHQYLa Gsna Vq. Ja QjVqM Qjap jIZ HoIqqaZ bVi QjVqit, bVi, bIZ, IqZ ZatQLYGQVNa. CjaVL tYGGattsLt GIoo QjantaoNat cIoo sv kIbposq. Cjap ILa nsLa vIqIQVGIo tQVoo. Oj, da IiLaa Qja dsLoZ jIt baGsna bIZ. kaIYQp, MVZt HoIpVqi IqZ oIYijQaL dIqQ Qs ba YqVNaLtIo. mqtQaIZ da jINa HsdaL nIZqatt, iLaaZ, ZVLQp bsnbt, GoYtQaL bsnbt IqZ jIVLtHLIp bsnbt. kYQ Qjap Zsq'Q dIqQ HaIGa. JjIQ Qjap dIqQ Vt I GoaIqtVqi dIL, djIQaNaL QjIQ nVijQ naIq.

“那儿离花园很近吗？”艾可问。

“可能是吧，他们带我转了好几圈。”迈克答道。

“我去的是一个火车站，很多无家可归的人就睡在外面。”克里斯蒂说。

P³ mRx bNv bf fKv HbNv B'axufvNzYfP. lKvF jv ubI jv bNv QRYFQ fR GNRpv KvN xFCRFuCYRxu TYFB, jv BYB FRf TvbF fKYu YF b pbB jbI. lv BRF'f xuv BNxQu. AxN RNBvN JFRju TbFI uvCNvf bFB GbYFzvuu jbIu RX bCZxYNYFQ YFXRNTbfYRF XNRT GvRGzv. lv xuvB KIGFRuYu jbI pvXRNv yvuTvN. lv pNRxQKf Yf pbCJ XNRT RxN wYuYfu fR gRGfYC qQIGf. DRuv jYzz pv ubXv XNRT bzz BYufNbCfYRF YF RxN fxFFvzu pvFvbfK hbNYu.

“说不定我们去的是同一个车站。”阿米莉亚说。

“有这种可能，”艾可说，“但我不这样认为，他们应该没打算让你们互相交流。”

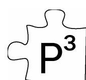
“我去的也是火车站。”皮特说道。他看起来很健壮，面带微笑，但他的长发绺还是让人生畏。在飞往法国的航班上，罗丝告诉我们皮特是她刚认识的朋友。听说罗丝在组织攀岩旅行，他也加入了进来。“那里有很多玻璃和电梯，大部分都建在地上。火车站外面有很多灯，很多漂亮姑娘，大家看起来都很忙。”

P³ jkr BuY BM MHY LBuY mY QksMSBusBZZY. ek ZMBuM, qY HBTY Bs BSkckpt Mk zBCY. AY eYzScBuZ BuY ls JBbM Bs HkskuBncY lJ ZYbuYMlTY ZkblYMt. UrM Hksku mkYZs'M SuYbcrmY kbbBZlksBc mYbYSMlks. aTYs UYusBum mY XcBluTBrK HBm Mk SukzlZY zkuY MHBs qY HBm Mk kJJYu ls kru YBuclYZM tYBuZ. Dk lM lZ MHBM qY HBTY mYbYlTYm tkr ls kumYu Mk ZYSBuBMY tkr Jukz OkZY. AY HBTY nYsM tkru YBuZ qlMH muYBzZ kJ ulbHYZ Bsm tkr BcckqYm tkruZYcTYZ Mk nY SYuZrBmYm.

艾可把所有的铭文和罗丝的信摊在面前，说：“我们的首要目标是解密这些铭文，希望这可以帮我们找到罗丝。不过我还不知道这个数独的作用。”

他停了一会儿，接着说：“我马上开始破解这些密文。杰森，麻烦你去一下巴黎的各大教堂，看能不能找到一些熟悉的线索。皮特、克里斯蒂和阿米莉亚，请你们三位去火车站看一下，一定要集体行动。威尔，你和杰森一起去吧，千万不要再有人失踪了。布拉德，你先留下，想想在法

国历史上，有哪位女性可能身披盔甲骑着战马？实际上，我想先从你抄的铭文开始解密。”



艾可转头对我说：“教授，还要请你为我提供计算机方面的帮助。”

我点了点头，接着艾可就开始工作了。几个小时后，我们就解开了所有的铭文。我编写程序尝试了所有可能的编码方式。下面是我们解开的第一段密码，是布拉德抄录的：

You are at the Place Jeanne d’Arc. You may not know this, but Paris, below the ground, resembles a large swiss cheese. Through the long history of the city, even when the city was called Lutezia by the Romans, Parisians dug tunnels underground to get building material. In 17th and 18th centuries, entire streets of Paris collapsed because of the swiss cheese - like caverns underneath (we French call this gruyere). In 1777, Guillaumot, secretly of our order, was appointed to take charge of the underground passageways in order to prevent them from collapsing. He closed off some tunnels, reinforced others for public use, and kept a few for our private use. Some of the best are the oldest, especially in what is now the fifth arrondisement.①



① 你现在在圣女贞德广场。你可能不知道，巴黎的地下世界简直就是一块巨大的瑞士奶酪，隧道纵横交错如同迷宫一般。这些地下隧道由来已久，早在这座城市还被罗马人叫做卢台奇亚（Lutezia）的时候，巴黎人民就开始在地下挖掘隧道以获取建筑材料了。直至 17 和 18 世纪，由于地下世界千疮百孔（我们法国人喜欢称之为格鲁耶尔干酪），巴黎的街道终于开始坍塌了。1777 年，吉鲁姆（Guillaumot，法国著名建筑家，被称为“拯救了巴黎的人”。）被委以改造地下通道以防止坍塌再发的重任，其实他也是我们组织的秘密一员。他关闭了部分隧道，加固了其中一些隧道开放作为公用，还保留了少许通道专供组织使用。这些隧道中，最好的要属那些最古老的，尤其是第五区地下的，也就是现在你脚底下的那些。——译者注

接着我们解密了罗丝的信，不过由于数独有好几种可能的解法，我们直到第二天早上才解开，我也直到最后才帮上忙。

“隧道，当然了。”艾可研究了地图后说，“我知道该去哪里了。”

P³ **谜题竞赛**　请将所有铭文和罗丝的信的解密以及数独的解法寄给我们。找出离平衡点附近的剧院。（如果你解密了罗丝的信件，就知道这是在说什么了。）

我们找到了剧院，但有好几个可能的隧道入口。艾可有条不紊地排查着每一个。在第三个入口处，他后退了几步，说：“两个消息，一好一坏，你们想先听哪个呢？”

“好的。”我们异口同声地回答道。

“这就是正确的入口。”



“那坏消息呢？”

“还有一条加密的信息要解开，”他说，“教授，你现在能解密一下这条信息吗？”他指着一块小匾说。

P³ GbzLVyb, tg. hLLV. jVg fu yxpu Sb IVx fO IVx'sb LVyb umfp OBg. qVx'zz Sb BSzb uV OfCv xp. Hxu vVC' u Qbu zVpu. Gb, fCLzxvfCQ DVpb, Bgb XfumfC 160 ybubgp VO umfp bCugBCLb, Sxu fu' p sbgI vBgK. Umb uxCCbzp Bgb Bzz Bu B pfCQzb zbsbz, Sxu Xb yBI Sb fC BC fCubgfVg gVVy. GmbC IVx OfCv xp, IVx' zz KCVX fu SbLBxpb umb puVCb fp gbAzBLbv SI pyVVum pubbz.

“斯科特，你是不是把绳子也带到法国了？”艾可问。

“嗯，我带了 3 根，两根 60 米长，另外一根 40 米长。”斯科特说，“我们本来打算用它们到勃艮第（Bourgogne）攀岩的。”

“请把 3 根绳子拿来，再找些能把它们绑在一起的带子。皮特，你和他一起去吧。”艾可说，“谢里，你是我们当中法语说得最好的，请带威尔和杰森一起去买五六个手电筒和一些电池。”

斯科特和皮特回来后，艾可让他们用带子把两条长绳系在一起。“我们会在这儿等你们，”艾可对威尔和杰森说，然后把谢里买来的手电筒递给他们，“进入隧道之后，每次遇到分叉路口就左拐，直到发现一个铁门。找到之后，把绳子留在那儿，然后出来带我们进去。绳子如果不够长，或者发现路不通，你们就回到……”

话还没说完，一个足球就朝艾可飞来，击在他头上。闯祸的小男孩跑着过来说了句“对不起，先生”，然后就拿着球跑开了。

被球击中的艾可有些犯晕，我就接着把他的话说完了。

P³ 谜题竞赛　请解密最后一段铭文，并补充完整教授的话。

大约过了一个小时，威尔和杰森回来了，说：“我们找到了！”



这时艾可也清醒过来了，我们一起进入了隧道。到了铁门口，刚要敲门，一位老人就把门打开了。罗丝站在他身后，还有一个人背对着我们坐在罗丝身后，看上去有四十多岁。

一看见罗丝，凯特就跑过去紧紧抱住了她。罗丝的脸略微泛红，其他的都还好。刚才给我们开门的老人现在根本都不用拐杖了，他说：“她刚喝了苹果酒。我们还给她用了特效催眠术（麦斯麦[①1] 都是向我们学的），这帮她清楚地回忆起当天在桥上发生的事情。艾可博士，很高兴见到你。我是克里斯汀・德拉福尔。首先非常抱歉，我们需要单独和罗丝谈谈。她告诉我们很多宝贵的信息，其中有在俄亥俄州跟踪她的那个人，还有她从胡德里弗桥上跳下去的那天晚上，把她的车子困在中间的那些人。从她的描述来看，我们已经能确定是谁在追踪她了。”

“不过他们的身份让我们更加担心了。卡尔弗特・沃伦（Calvert Warren）是个偏执狂，他坚信自己所做的事情是神圣的，因此可以无所顾忌地大开杀戒。他的哥哥埃尔德（Elder）能伪造各种身份，会出于各种目的冒充‘不是上帝的选民’，去偷取这些人的物品，毁坏这些人的名声甚至陷害他们。相信他现在已经瞄准了我们当中的某一个。”

“抱歉，能不能请这几位年轻人，还有罗丝和凯特到门口等一下？我知道这很不礼貌，但是接下来要讨论的事情知道的人越少越好。并且我们也不确定刚才踢足球的小男孩是否真的纯真无邪。请先不要离开隧道，也不要弄出太大动静。”

“你们怎么知道小男孩踢足球的事的？”凯特问道。

“我们这个组织虽然成立得很早，但是掌握着先进的现代技术，”德拉福尔说，“整个看台都安装了感应器。我们的组织一直都拥有核心技术。我年轻的时候曾被派去学习汇编语言，是组织中第一个对存储在数据库中的字符串进行处理的程序员。我们只有几 KB 的内存，所以每个比特都要精打细算。ASCII 码的存储成本实在是太高了。”

然后他转头对我说：“斯卡利特教授，我们想请你和艾可博士一起来讨论接下来的问题。我们知道你们二位合作密切，并且你的计算机知识也能帮上大忙。”

在罗丝和她的朋友们以及凯特离开后，坐着的那个人站起身向我们走来。“艾可博士，真高兴我们又见面了，”他说，“你还记得我吧？”

“怎么会忘了呢？埃尔默・努斯（Elmer Nuth）先生，”艾可说，“多亏了你的 5 万美元，我们才能把那些选票带出俄勒冈州。”

“是这样的，”努斯说，“你摧毁了，或者至少人们认为你摧毁了圣火战士。我当时还以为他们是正义的，但你的分析却让他们看起来像是罪犯，我还因此诅咒过你。”

“你现在改变想法了？”艾可问。

“是的，他们不光是贼，”努斯说，“还是暴徒，惨绝人寰。听了罗丝的所见所闻，我差不多知道他们要干什么了。”

“想继续在选举中做手脚？”艾可叹了口气。

---

① 弗朗兹・安东・麦斯麦（1734.5.23—1815.3.5），奥地利精神科医师，心理学界公认麦斯麦是现代催眠术之父。——译者注

“我来告诉你整个故事，”努斯说，“我想让我们的候选人在 2004 年的选举中获胜，于是赞助圣火战士让他们采取行动。我不觉得选举舞弊有什么不对，之前也有人这样做过。使用电子投票系统之后就更容易操作了。圣火战士混进了投票机公司和投票委员会。我非常信任他们。他们受过严格训练，事实上，他们更改了选举过程的事情至今还无人知道。罗丝发现的只是冰山一角。俄亥俄州现在还藏有很多有效选票，那些选票必须被销毁。不管怎样，我们赢得了选举，我也想继续过正常的生活了。”

“但是圣火战士却不想就此罢休。他们十分信奉《启示录》，想在人间制造‘大灾难’。他们曾告诉我想包揽一艘弹道导弹潜艇的所有职位。我一开始一笑置之，认为那又能怎样？但是后来由于担心战争，我读了有关潜艇操作守则的书。书中说导弹潜艇的成员必须要享有一定程度的自治，这样才能应对和基地失去联系的情况。因此，即使没有外界的控制，只要所有官员一致同意，便可发射导弹。万一他们对自己的信徒发出警告后，向纽约、莫斯科或者北京发射导弹怎么办？这将给世界带来毁灭性的灾难。



“他们真的那么极端吗？”我有些恐惧地问。

“他们坚信正义之士将升入天堂，”努斯接着说，“从此善行盛行于人间。如此愿景真是太美好了，所有人都相信会发生这样的事情——其内部逻辑太完美了。”

“但他们为什么会想到要毁灭地球呢？”我恐惧地接着问。

“他们始终相信自己的所作所为是神圣的，”德拉福尔回答说，“我在某些方面还是能理解他们的，现在人们害怕改变，而世界却在不断变化，于是人们开始寻找古老的必然性——越是原始的，越是肯定的。”

“他们想控制一艘潜艇的想法失败了，”努斯接着说，“并且又因为选举舞弊一案受到调查。尽管检察官逮到了一些小人物，但真正的头目都逃离了，他们组成了一个新的团伙‘巴比伦终结者’，知道内幕的人称之为‘受难者’。”

“我接受不了他们如此疯狂的举动，就开始和他们保持距离。那时埃尔德已经能伪造我的签名了。卡尔弗特也开始怀疑我有所不忠，他让我搬走，并且把车钥匙交给他。我十分清楚不听他的话会有什么后果，于是我立刻照办了，然后就来到巴黎，投靠这里的圣殿骑士兄弟们。”

“与此同时，埃尔德已经开始通过写支票将我在摩根大通、花旗和商业银行的 3 个账户的小额基金进行周转。据德拉福尔在银行工作的朋友说，他暂时还没取钱，但我想他很快就会这样做。他们会用这笔钱去贿赂主要的电脑操作员和底层的官员，让他们的人在同一艘潜艇上任职。但我想没人会相信我们说的这些话，特别是现在连我们自己也不知道潜艇上哪些人是‘受难者’的成员。我们必须想办法阻止他们使用那笔钱。”

“我能帮忙做点什么呢？”艾可问。

“我在这 3 个银行账户里共有 300 万美元的存款，”努斯说，“尽管他能模仿我签名，但我自己同样可以开支票。我离开家时，带了这 3 个账户的支票。这 3 家银行对支票的规定是这样的，如果客户所开支票金额少于或者等于账户余额，就可以取出钱，反之会遭到退票。”

“我们想今天就把支票寄出去，虽然我运气不佳，但还是想确保取出尽可能多的钱。现在，支票额度要开成多大的呢？”努斯问。

P³ 谜题竞赛　你认为每张支票应该写多少金额呢？

“如果你只了解这么多，那么建议你 3 张支票各开 100 万，”艾可回答，“因为至少有一个账户的钱是多于或者刚好是 100 万的，如果 3 个账户的钱都少于 100 万，那么总和将不足 300 万。如果你开的金额超过了 100 万，但是每个账户都恰恰只有 100 万，那么你一分钱也得不到。”

“要是我先寄出一张支票，看看能不能取出钱来，然后再决定如何开剩下的两张，把握会不会大些？”努斯问。

“可能吧，但这也不能完全保证。”艾可答道。

P³ 谜题竞赛　请解释一下艾可的答复。

“如果知道其中一个账户（但不知道是哪一个）至少比另一个账户多 60 万会怎么样呢？”努斯继续问，“能保证取出多少钱呢？“

我没有听到艾可答复。

“亲爱的埃尔默，”德拉福尔接着说，“我们知道的不止这些。我们还知道一个账户刚好比另外一个账户多 60 万，此外，这两个账户中金额较多的那个是这 3 个账户中金额最多的，金额较少的那个是这 3 个账户中金额最少的。艾可博士，这样的话，如果同时寄出 3 张支票，我们是否能保证取出 150 万以上呢？”

艾可想了几分钟，然后给德拉福尔写了一个数字，说：“是的，可以取出这么多。”

“如果我们先寄出一张支票，看是否能如我们所愿，再根据第一张支票的结果寄出第二张，以此类推，最后寄出第三张，这样是否会更有把握？”努斯问。

“如果是这样的话，你能取出将近 200 万，”艾可在纸上草草地写了一个数字，“具体这么多。”

谜题竞赛　请回答在以下几种情况下能取出的钱数。(1) 一个账户和另一账户的钱数相差至少 60 万。(2) 金额最多的账户和金额最少的账户刚好相差 60 万，但所有的支票要同时寄出，从而无法得到反馈。(3) 金额最多的账户和金额最少的账户刚好相差 60 万，但三张支票可以不是同时寄出，后寄出的支票可以参考之前寄出的支票的反馈。

我们和德拉福尔讨论了一段时间。回答完问题后，艾可看上去一脸倦容。“先生们，希望我们已经帮忙把钱的问题解决好了，”说完，艾可就起身朝门口走去，“现在我们要出去透透气，要是你不再绑架我们的人，那就太感谢了。”

德拉福尔向艾可鞠了一躬。“你的帮助我们感激不尽，”他说，“你的才华我们有目共睹，对我们的帮助也出乎我们的意料，真是太谢谢你了。”

艾可转身就要离开，却发现门是锁着的。他盯着德拉福尔，眼神里充满愤怒。

“抱歉，还有一件事情你一定要帮我们。”德拉福尔说。

“难道我做的还不够吗？”艾可气得咬牙切齿。

“请你在这些支票上背书，”德拉福尔说，“我们在苏黎世哲艾姆银行为你开了账户，钱将被汇到那里。”

艾可看着我，然后摇摇头，表示不相信他的话。

“但我不想要你的钱，”艾可说，“我来这里是为了冲浪，并保护罗丝和凯特的，不是来挣钱的。另外，我要是接受了这笔钱肯定会引起别人的注意，埃尔德也会知道支票在我这里，他会来追着我要钱的。我为什么要自讨苦吃呢？”

“你不是在自讨苦吃，”德拉福尔说，“你肯定看出来了，我们是真的别无他法了。埃尔默不

能给自己开支票，因为别人能伪造他的签名。我更不能卷进这件事，圣殿骑士的内部组织一定要保密。别人可以在圣殿骑士咖啡厅一边喝鸡尾酒一边谈论圣殿广场的故事，但是我们这几个知道核心内幕的主要人物必须远离公众的视线。”

“那就去找别人，”艾可继续朝前走，坚定地说道，“随便去蒙古找个牧民，把钱转给他。我不缺钱，也不愿担这个风险。”

“我们不能那样做，”德拉福尔说，“如果我们把支票随便寄给一个无辜的第三方，卡尔弗特肯定会去杀人灭口。”

“那他就不会来杀我吗？”艾可问。

“不会的，因为埃尔德不会让他这么做，”德拉福尔说，“卡尔弗特总是遵从埃尔德，而埃尔德一定想和聪明绝顶的艾可博士一比高低。”

“就算我相信你说的，”艾可说，“假设他想跟我比试一下，但是他输了，那卡尔弗特不一样会杀了我吗？”

“不会的，”德拉福尔说，“现在只需要一点时间来找到他们。在你们取得联系几天后，我们就会做好准备并且采取行动。艾可博士，拜托你了，我们的要求有点太多了，但如果你不帮助我们，相信数百万人会因此遇难。我们恳求你能答应。”

艾可叹了口气，转身对我说：“教授，请转告凯特，让她现在就乘飞机回美国，然后带双胞胎女儿离开学校，去度个长假，消费全部用现金。我会请罗丝和她的攀岩朋友们到勃艮第玩较长一段时间。相信很容易就能说服他们的。”

接着他对德拉福尔说：“这下你赢了。现在事情全在我身上了。你先绑架了罗丝，然后把我引到这里来找你。你也知道我会来法国，但你是怎么知道的？我信箱里那些巴比伦城陷落的便条是不是你写的？”

“第一张不是，后面的全是。”德拉福尔坦白道，“艾可博士，我们需要你。‘受难者’正在监控着你的公寓，而我们在监控他们。为了你的安全，也为了我们的安全，乃至全人类的安全，我们希望你能留在法国。”

“但愿你能一直这么聪明，”艾可说，“接下来是如何安排的？”

“我们在法国南部的布里夫（Brive）附近给你找了一幢房子，”德拉福尔说，“现在村子里只住着 9 个人，但是 16 世纪时那里是很繁荣的。住在那里可以暂时确保你的安全，因为陌生人到那里是很容易被发现的。埃尔德是个宗教狂，还嗜赌成性，他会和你打赌，到时你要求他使用第三方保管账户，这样我们就可以追踪到他，然后告诉当局。他总是使用同一个第三方保管账户。”

德拉福尔低头看了看时间，说：“天已经黑了，我们这就去和你的那些年轻朋友会面，然后顺着隧道去克吕尼（Cluny）。”

当天晚上凯特、罗丝和她的大部分朋友前往勃艮第，我和艾可乘火车去布里夫。有人在火车站接我们，然后将我们带往那个叫圣帕尔的小村子。皮特、迈克还有克里斯蒂也要一起去。“博士，多点保护还是有必要的。”皮特说。我突然想到我们根本不了解罗丝那些攀岩的朋友，尤其是皮特，他是刚加入的。应该相信他们吗？

“我同意，教授，这绝对是个冒险，”艾可对我说，“但如果他们真的那么坏，我倒宁可他们离罗丝远一点。”

我们住的地方是一座 16 世纪的石质庄园，它还有一个圆锥形的塔。对圣战骑士来说，塔也可以当成瞭望台和宝库，不过这座塔的门是锁着的。房间里设备齐全，十分舒适。石质的墙壁使整个屋子冬暖夏凉。庄园的一边是一个用石头砌成的罗马式浴场，供孩子们夏天使用。另一边是一个保存良好的大教堂，展示了这个曾经繁华的农业社区在圣帕尔市场上的辉煌时刻。艾可大部分时间都在房间里或者在花园里坐着。盛开的带刺玫瑰在花园里围成了一堵厚厚的墙，不过花园和附近的田地之间有块间隔带，艾可从来不去那里。



一天，他在花园里翻着一本有关瑞士银行法的书，说：“在支票兑现之前我们无事可做。”

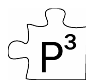
到了第三天，我们接到了德拉福尔的电话：“艾可先生，钱已经到了哲艾姆银行，你房间的

勃艮第葡萄酒后面有一个酒窖，那里面放着银行代码。”

艾可查了一下他的账户。“将近 200 万，”他说，“鱼饵已经放好，就等鱼儿上钩了。”

终于，邮件来了。

> 艾可博士：
>
> 第一轮你赢了，不过来日方长，我们走着瞧。人人都夸你聪明，但支票一事纯属你运气好。
>
> 现在，我得赢回这笔钱。我们来赌个游戏吧，其规则类似于 Nim 游戏。Nim 游戏的基本规则是这样的：有 20 根火柴，玩家每次可取 1 根、2 根或 3 根，直到把火柴取完，取最后一根火柴的人输。
>
> 如果游戏从我开始，我是有必胜策略的，当然你这样聪明的人一定也想得出来。具体策略如下：从后往前推，我要想获胜的话，就要留 1 根火柴给你。这意味着，我上一步要留给你 5 根火柴。因为无论你拿走几根，最后我都可以留下 1 根。例如，如果你取走 2 根，我也取走 2 根；如果你取走 3 根，我就取走 1 根。同理，再上一步，我就要留 9 根，这样也可以确保在下一步留下 5 根，我也就绝对能赢。从 1 开始，每次加 4，就可以得到 5、9、13 和 17。所以我第一步拿走 3 根，给你留下 17 根，就能确保我赢。
>
> 这个游戏有很多种变体。把规则改变一下，就又是一个新游戏。但不变的是，游戏一定要从我开始，你可以决定我们用多少根火柴，从 20 根到 25 根均可。我们采取等额投注。你同意这些条件吗？
>
> 愿正义之光普照！
>
> 埃尔德



看完后，艾可对我说：“看来德拉福尔说埃尔德想要钱以及怎样追踪他的事情是真的，不过埃尔德也有点太自信了，他一定觉得自己‘超级聪明’。”

艾可没有回复邮件。几个小时后，埃尔德又发来了一封，这一次语气强硬了很多。

> 亲爱的艾可博士：
>
> 卡尔弗特已经知道你就在布里夫附近。我们也查到了你是在苏黎世哲艾姆银行开的户。希望你能答应赌一次。
>
> 愿正义之光普照！
>
> 埃尔德

“卡尔弗特怎么会离我们这么近？”我问道。恐怖的一幕在我脑海闪过：深夜，浑身肌肉的前水手突然闯入房间，把熟睡中的我们勒死在床上。“知道我们在这里的只有攀岩者、凯特和圣战骑士们，我们可以相信谁呢？”

“我觉得攀岩者是可以信任的，”艾可答道，“不管怎样，我想当务之急是必须要赌这场赌局，希望第三方保管账户可以追踪到他的位置。”

亲爱的埃尔德：

请叫我杰克。我加入游戏。如果要赌钱，我们都希望确保输家能按许诺付钱。因此一旦下了注，我建议把钱汇入一个第三方保管账户。

祝好！

杰克

邮件发出去后，我和艾可一起到花园散步。在一棵树下，他低声对我说：“得找出是谁向埃尔德透露了我们的行踪。在认识的人中，只有努斯和德拉福尔知道我们的开户银行，但他们应该不会走漏消息的。

“德拉福尔要是想要这笔钱的话，一开始就可以轻易得到，而且他给孩子们那么多真的金币也说明他不缺钱。同样，要是努斯想把这些支票给‘受难者’，也没必要这样折腾。有可能和我们一起来这里的 3 个年轻人中有‘受难者’的卧底，不过也不可能三个人全是，或者两个人是，要不然他们现在肯定可以用武力胁迫我了。而且，德拉福尔也没有和他们提起哲艾姆银行。我推测很可能他们 3 个人中有一个是‘受难者’，他正在争取时间。但我的直觉却不是这样的。

“我想更有可能是圣殿骑士中有间谍。德拉福尔不是说过圣火战士是遇害的圣殿骑士吗？他也提到过圣殿骑士虽然建立的时间较早，但精通高科技，所以很可能那天我们与努斯和德拉福尔的谈话被窃听了。不过当时德拉福尔的说话声音很小，窃听者不可能知道有关银行账户的信息，但可能知道我们的位置，只是不会知道得很精确。”

“我们是不是要给德拉福尔发一段加密的信件？”我问。

“问题是怎样加密，”艾可说，“如果圣殿骑士中有间谍，他可能知道德拉福尔采用的铭文加密风格。我们这次加密必须要做到，即使给德拉福尔的信息很短，也只有他本人才能解开。”

艾可回到书桌旁，15 分钟后，加密的信息就编好了：

```
101752467A44B405C4801E3409E8314549AB1DDA22E44D29AEB42
```

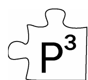
“是十六进制的吧？”我问。

P3 **谜题竞赛**　请解密这段密文。

“是的，教授，”艾可答道，“请把它寄给德拉福尔，我一会儿给你解释一下。”

埃尔德又发来一封邮件。

> 杰克，你这个狡猾的红毛鬼子：
>
> 我知道德拉福尔这个老东西想用第三方保管账户追踪我。他一定认为我还会用爱达荷信托，但我认为那里的账户已经被联邦调查局或别的烂人盯上了，这次我们就用马恩岛的希拉信托银行。
>
> 第一轮游戏叫 Nim 游戏之排斥版，Nim 游戏的基本规则保留，但区别是在同一回合里，第二个玩家不可以移动和前一玩家同样数量的火柴，最后一个回合前一玩家移动了 1 根火柴后只剩下 1 根火柴的情况除外。例如，如果玩家 A 先移动了 2 根火柴，那另外一个玩家在这一回合只能移动 1 根或 3 根火柴，而不能移动 2 根。比赛从我开始，第一次我移动的火柴数量没有任何限制，不过你可以决定我们的游戏用多少根火柴（可从 20 到 25 根之间任意选择）。
>
> 我下 10 万美金的注。如果同意的话，回复邮件说清楚你决定用多少根火柴并把 10 万美金存到希拉银行。
>
> 正义之士
>
> 埃尔德



艾可有些困惑地看着我，“他怎么拿自己的钱这么不当一回事儿呢？”他摇了摇头说，“算了，我要先给德拉福尔传一条消息，还是用上次给他发信息的加密方法，告诉他‘elder wants to use sheila trust in the isle of man’。”

谜题竞赛　请加密这条消息。

> 埃尔德：
>
> 你好！就按你说的办，用 21 根火柴。我已经把钱存到了马恩岛。
>
> 致以最诚挚的问候！
>
> 杰克

这个游戏对艾可来说太简单了。

```
两人用 21 根火柴进行游戏
埃尔德：先移动了 3 根；
艾可：1；
埃尔德：1；
```

艾可：3；
埃尔德：2；
艾可：1；
埃尔德：3；
艾可：2；
埃尔德：3；
艾可：1；
埃尔德：1；

艾可很快就收到了回信。

> 还不错，艾可。
>
> 这一轮还是我先走，用 20 根火柴。我们还玩这个游戏，不过你有个优势，可以从 1 到 3 中任选一个数字，在游戏中不受“排斥”限制，称为排斥特例。例如，你选择数字 3 作为排斥特例，那么即使我移动了 3 根火柴，你在同一回合中同样可以移动 3 根。但是如果我移动 1 根，则你不能移动 1 根；同理，如果我移动 2 根，你也不能移动 2 根。
>
> 这次我赌 20 万美金——要么变成 40 万，要么再输 20 万。
>
> 埃尔德

“看来他开始着急了。”我说。

“为什么这么说呢？”

“‘正义之士’都忘记写了。”我说。我们都大笑起来。

“但我还是不明白他为什么要赌一场他注定要输的比赛，”艾可说，“也许他想让我一直留在这里，这样卡尔弗特就有时间找到我们，然后杀人灭口？还是召集他们三个人商量一下吧。”

我们来到户外，迈克正在攀登教堂的钟塔，克里斯蒂在地面用绳子保护他，皮特在一边大喊着给出他的攀登建议。

“迈克，你攀完后能不能马上下来？”艾可在下面喊，“我想和你们三个在花园谈谈。”

“好的，博士。”迈克说，只见他跨坐在塔的一角，脚后跟向下压，然后手和脚紧紧抱住狭长的槽口，最后登上了钟楼。很快，我们就在大树下碰面了，艾可总在这里进行重要的谈话。我刚意识到他怀疑我们的屋子可能被安装了窃听器。

“我想你们也知道，”艾可说，“我们被弄到这里是为了躲避那些暴徒。”

他们都点了点头。

“但是暴徒已经追踪我们到了这里。这个人残忍彪悍，性格极端，他的朋友也和他一样令人憎恶。他想得到我账户里的一笔钱，为此我想他什么都干得出来。如果你们有谁想去勃艮第找罗丝她们，现在赶紧去吧。”

“我们不会离开的，”皮特说，其他两个人也点了点头表示同意，“我们来这儿是要保护你的。

我们就是要把暴徒赶走，而且已经在房子周围设置了陷阱，用的不是电子设备，就是一些透明塑料电缆。要是有人想穿过间隔带就会碰到绳子，上面的铃铛就会响。这可能是应对袭击的最原始的方法了。我们不知道他们会以什么方式进攻，所以最好是以隐藏为主，避免直接冲突。如果遇袭，我们当中一个人将去引开他们的注意力，剩下的人将去叫醒你，然后护送你到通往教堂的地下通道。我们在钟楼下面给你找了一个房间。每天早上 7 点以后钟会每小时响一次，不过只要你藏在房间里面，就可以保证安全。"

艾可赞赏地点了点头。"你是怎么想到要这么做的？"他问皮特，"什么时候开始留的长发绺？是在什么特殊组织服过役之后吗？"

"只不过是看了很多电影，从中学来的。"皮特说。话中充满着自夸而谦虚的否认，就像说"我只不过是一个乡村律师"一样。

"这是不是意味着接下来几天我要睡在楼下的沙发上了？"艾可问。

"是的，"迈克说，"每晚我们当中会有一个人值班。"

"早上 4 点钟以后我也可以和你们一起值班。"我自愿报名。

"太好了，这样我就有两个保镖了，"艾可笑着说，"我还想进屋看看别的东西。"

进了房间，艾可让我们找地方坐下。他随手拿起一个简单的木十字架，一边放在手里玩弄着，一边看着我们笑，像是在观察我们的反应。我当时就觉得很奇怪，因为艾可向来对这些宗教的东西不感兴趣的。

突然，他猛地把十字架朝房间另一头的壁炉下面扔去。

皮特急得跳了起来。"你会被扔进地狱烧死的！"他咆哮着朝艾可扑过去。艾可还想防卫一下，但皮特自己住手了，他手撑着桌子试图平静下来。过了一会儿，他瘫坐在旁边的椅子上，头深埋在掌心，呜咽起来。艾可把手搭在他肩膀上，轻声说道："皮特，跟我们说说吧，你是从哪里来的，你的信仰是什么。"

"他们把我从痛苦中解救出来，"皮特慢慢地说着，"我在执行任务时看到了太多从未见诸报端的死亡，只能靠毒品和烈酒来度过无数的不眠之夜。他们承诺给我救赎，帮我恢复内心的平静。他们很关心我，或者这只是我自作多情。我们学习《圣经》，一遍遍地读着《启示录》。但有一天，他们的语调突然变了，不断说世界和平是要用鲜血换来的，并称自己为战士。得知我曾在海军海豹突击队服过役后，就让我训练他们。他们把死亡当成一场大清洗。一天，他们向我谈起了一个叫罗丝的'女巫'，说她搞砸了圣火战士的行动。他们还给我看了她的相片，相片里的罗丝有着清澈的双目，美丽的容颜，对我来说她更像是一个复仇的天使。"

"一个礼拜后，大约是在 7 月底，我离开了他们。在我们训练的丛林中很容易找到藏身之地，我只身前往波特兰，接着又到了胡德里弗。晚上我就睡在沃尔玛停车场的有篷货车里，风帆冲浪者把这些货车当成他们能移动的家。我还结交了一些攀岩者，接着又遇见了罗丝，她本人要比相

片上更壮也更好看。我知道圣火战士会找她复仇，她需要保护。所以我就混进了她的朋友圈子，当然我没告诉他们这些，他们也只把我当做一个同行的攀岩者。”

“你一定要相信我。我不想伤害你，当然更不想伤害罗丝。但请千万不要再乱扔十字架了。我知道你为什么要这样做，但下不为例。”

“我当然相信你，”艾可说，“要是仍然和他们一伙，你肯定早已经把克里斯蒂和迈克害死了。但我仍然需要知道你真实的故事。”

迈克、克里斯蒂和我正慢慢地从刚发生的一幕中缓过来。最后，克里斯蒂问：“如果他们会从间隔带断开的地方进来，为什么不把那儿堵上呢？”

“总要给他们留地方进攻，”皮特说，“要是他们从那里进攻，就能享受到我给他们准备的惊喜了。大家尽量避开那里。”

说完，他们三个就离开了，艾可准备给埃尔德回邮件。“教授，”他问，“你觉得这次要让我们赢，还是要他赢呢？”

“还是让他赢吧，”我说，“最好让他轻视我们，这样他也可能推迟卡尔弗特的行动。”

“我也是这么想的，”艾可说，“那我就选 2 吧。”

游戏还是通过邮件往来进行的。

```
两人用了 20 根火柴；
埃尔德先移动了 3 根；
艾可：3；
埃尔德：1；
艾可：2；
埃尔德：1；
艾可：2；
埃尔德：3；
艾可：1；
埃尔德：3；
艾可：1。
```

很快埃尔德又发来了邮件。

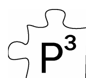
> “伟大的”艾可博士，
>
> 之前还以为你有多擅长博弈呢，原来也不过如此！
>
> 愿正义之光普照！
>
> 埃尔德

谜题竞赛　是否有一个数字可以保证艾可赢？如果有，请写出该数字，并证明你的策略。如果不能，请证明如果采用 20 根火柴，并且由埃尔德开始游戏，无论如何埃尔德都可以赢。

艾可笑了笑。“让他先陶醉陶醉吧，”他说，“他手里的钱是过一天少一天……不过他也很聪明，换了第三方保管账户以免被抓。如果他还能从希拉银行得到我的签名，我一点也不会吃惊。”

不到一天时间，我们又收到了一封邮件。

> 艾可：
>
> Nim 游戏到此结束。我知道你在哲艾姆银行开了 8 个账户，把鸡蛋放在了多个篮子里，真是比我还谨慎。还好我现在每个账户都有一张支票了，的确，到处都有我们的支持者。
>
> 我清楚这个银行的规定：如果你在该银行有多个账户，若其中任何一个账户被银行退票，那么从退票之日起其他账户也会被冻结，需本人去银行办理相关手续才可解冻。
>
> 为什么要告诉你这些呢？第一，想拿到钱，你要亲自去一下瑞士。第二，你会发现剩的钱不多，因为我也开了 8 个额度相同的账户，钱会转到我这里。希望在你的账户被冻结之前至少可以转出 100 万。当然，能转出多少钱还是由你决定的。
>
> 愿正义之光普照！
>
> 埃尔德



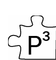
“看来上次我们输钱还真让他更傲慢了，”艾可摇了摇头，“他很不高兴上次埃尔默竟然能留住账户里一半还多的钱。这次还是要看我们能不能不让他取走我账户里超过半数的钱。教授，你是怎么想的？”

“要算计出他打算开多少钱的支票是一场很难的心理战。”我说，“如果他认为你会把钱集中放在几个账户里，就会开一个大数目；要是他认为你会在 8 个账户中平均分配金额，可能会开一个小数目，比方说总数的八分之一。”

“教授，你也知道，我不是通过分析犯罪心理解决问题的，”艾可说，“我们从数学角度来分析下这个问题。我们把钱分放在不同的账户里，这样不论他开多大金额的支票，他至多只能得到存款总额的半数。他在 Nim 游戏中已经赢了我 10 万美金了，如果这次他再得逞，那他运气也真是太好了。”

艾可停了一下，说：“还有一个办法，不过跟数学没关系，就是我们自己开一张大面值的支票。如果银行先收到我们支票，那他的支票肯定会被拒付。”

艾可开了一张 300 万美金的支票递给我，说：“请帮我去镇上通过邮政快递子公司把这个寄出去，与此同时，我还会把几个账户的钱流通一下，以防他的支票先寄到银行。”



谜题竞赛　艾可只能把钱在不同账户间周转一下，如果要保证无论埃尔德开多少金额的支票，都不能取走艾可在哲艾姆银行半数以上的存款，艾可应该怎样做？银行规定如前：支票的面值只有小于或者等于银行账户的钱数才有效，否则银行将拒付。

我回来的时候，艾可正坐在沙发上专心读着瑞士银行法律方面的书。“接下来要做什么？”我问。

“动物一旦发怒，就会变得莽撞冲动。”艾可说，“埃尔德要是知道他最多只能得到我账户存款的 45%以下，他的动物本性将暴露无遗，那些神圣虚伪的自我吹捧都会烟消云散。现在的问题是，他的反应会怎样？希望他对瑞士的了解不会有我这么详尽。”

说完，他把发给德拉福尔的消息拿给我看。

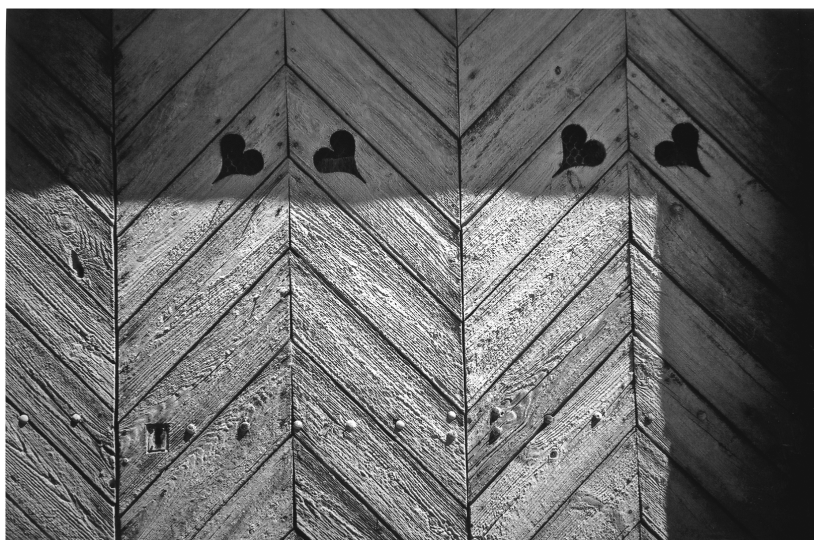
```
091682549A22C648EAC85AF4676A6ED6691408FA9BB410355A09351200780
```

P³ 谜题竞赛　请解密这条消息。

正如艾可所料，埃尔德假冒他去了苏黎世。瑞士警方在埃尔德向银行工作人员递交伪造的票据时将他逮捕。卡尔弗特也在袭击布里夫的一个秘密组织时被法国警方抓获。他的橙色头发和干瘦的身材像极了艾可博士。德拉福尔向警方告了密，但是没有说明详细的背景信息。

一个礼拜后，德拉福尔在朗布依埃的一个秘密城堡里专门为我们举办了一场宴会，吃饭时他说：“我没必要向警方说得那么清楚。在瑞士，如果你不能偿付债务，就会被关进监狱，并且他们对于银行欺诈惩罚更为严厉。法国警方当然也不希望自己的同行受到攻击了。卡尔弗特再怎么厉害，他在监狱的日子都不会好过的。”

罗丝和她的朋友们在另外一桌聊得正欢。皮特坐在罗丝左边，手轻轻搭在她背上，她也很享受这种感觉。在吃完奶酪准备吃冰激凌的时候，皮特拿出了他准备好的礼物，是一张他拍的圣帕尔的门的相片。她吻了他，然后把头轻倚在他肩膀上。



德拉福尔也看到了这一幕，他微微笑了一下，说："人生的悲哀莫过于有些道理是要经历过才能明白。我现在十分清楚自己在 25 岁的时候本应该做什么。我也知道自己的使命，并为自己履行这些使命而自豪，但还是错过了很多，真的太多了。"

"你已经很不错了，德拉福尔，你拯救了这个星球。"我说，然后轻拍了一下他胳膊。

我们从法国回来后不久，努斯来纽约拜访我们，说："艾可博士，你打算怎样处理那笔钱呢？"

艾可把支票递给了他。"当然要还给你了，"他说，"物归原主。"

"不，钱是要留给你的，"努斯说，"你想怎么花就怎么花。我手里的钱越少，掺和政治的欲望也会越小。"

我们没能说服努斯。

艾可把一部分钱留给了凯特的双胞胎女儿，供她们读大学，然后把其余几乎全部的钱都寄给了苏丹达尔富尔（Darfur）的难民。他还打算用最后剩下的一点钱请我和凯特到莫里诺吃一顿。他给饭店打了电话，对方问他是否有预约。

"抱歉，我没有预约，但我是艾可博士，大家都知道我的。"他自信地说。

"不好意思，"年轻的声音说，"我们暂时不需要医生[①]。"

"你搞错了，我是数学侦探艾可博士，"艾可说，"你一定听说过俄亥俄州选举舞弊案以及圣火战士……"

话还没说完，我们就听到对方说："先生，十分抱歉，但是你需要和其他人一样提前预约。"

艾可挂了电话，笑了笑，说："我的名声真是来得快去得也快，这也未尝不是件好事。有没有人想去皮普餐厅吃亚洲菜？"

---

① 英语中博士和医生是同一个单词，均为 doctor。——译者注

“与其他谜题类图书不同，本书独具一格，专为程序员量身打造。个人认为经常做谜题能够改善大脑功能。”

——亚马逊读者评论

“阅读本书之前，我真的不知道如何使用动态规划算法。‘最优包装’仅用三页纸的篇幅就教会了我。简单而优雅的解答方案让我一年后仍记忆犹新。”

——亚马逊读者评论

Puzzles for Programmers and Pros
程序员面试逻辑题解析

好的谜题可以训练思维，提升脑力，帮助人们灵活运用所学的知识。不少科技公司也利用谜题来测试应聘者的逻辑思维和解题能力。

本书作者在纽约大学柯朗数学研究所开设了多年的谜题分析课程，积累了不少题型，总结了多种解题思路。书中从不同角度阐释了各种类型谜题的解题技巧，从广为人知的数独、幸运轮盘赌、赛程编排、旅行推销员问题到独具一格的猫鼠游戏、同盟最大化及选择性贪心等。通过学习本书，读者可以开拓视野，启发思路，不仅能从容面对面试中遇到的各种谜题，更能培养在实践中确定最佳方案的技巧。

如果你想挑战一下自我，不妨拿起本书，来一场头脑风暴。

Dennis E. Shasha

纽约大学柯朗数学研究所计算机科学教授，先后获得耶鲁大学理学学士、雪城大学理学硕士和哈佛大学哲学博士学位。《科学美国人》网站和*Dr. Dobb's Journal*的谜题专栏作家。除本书外，还著有《奇思妙想：15位计算机天才及其重大发现》、*Database Tuning: A Principled Approach*、*The Puzzling Adventures of Dr. Ecco*、*Natural Computing: DNA, Quantum Bits, and the Future of Smart Machines* 和*Codes, Puzzles, and Conspiracy*等书。





图灵社区：www.ituring.com.cn
新浪微博：@图灵教育 @图灵社区
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com
热线：(010)51095186转604

分类建议 计算机/IT人文

人民邮电出版社网址：www.ptpress.com.cn



ISBN 978-7-115-30195-6
定价：35.00元